

**UNIVERZITET UNION**  
**FAKULTET ZA GRADITELJSKI MENADŽMENT**  
**FAKULTET ZA MENADŽMENT NEKRETNINA**  
**FAKULTET ZA PREDUZETNIČKI BIZNIS**

**Dr Marina Lj. Milovanović**  
**MSc Zorica D. Milovanović**

**ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA**  
**ZA PRIPREMU PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE**

**DRUGO DOPUNJENO IZDANJE**

**Beograd, 2011.**

## SADRŽAJ:

|  |            |
|--|------------|
| <b>I ALGEBARSKI IZRAZI .....</b>                                     | <b>1</b>   |
| <b>II LINEARNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE .....</b>                     | <b>6</b>   |
| <b>III STEPENOVANJE I KORENOVANJE .....</b>                          | <b>10</b>  |
| <b>IV KVADRATNA JEDNAČINA I KVADRATNA FUNKCIJA .....</b>             | <b>16</b>  |
| <b>V EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA .....</b>               | <b>21</b>  |
| <b>VI TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE.....</b>                             | <b>29</b>  |
| <b>VII POLIEDRI.....</b>   | <b>35</b>  |
| <b>VIII OBRтна TELA.....</b>   | <b>47</b>  |
| <b>IX ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNI.....</b>                         | <b>53</b>  |
| <b>X VEKTORSKA ALGEBRA .....</b>                                     | <b>85</b>  |
| <b>PRIMER TESTA SA PRIJEMNOG ISPITA 2008.GODINE.....</b>             | <b>106</b> |
| <b>PRIMER TESTA SA PRIJEMNOG ISPITA 2009.GODINE.....</b>             | <b>107</b> |
| <b>PRIMER TESTA SA PRIJEMNOG ISPITA 2010.GODINE.....</b>             | <b>108</b> |
| <b>PRIMER TESTA SA PRIJEMNOG ISPITA 2010.GODINE (septembar).....</b> | <b>109</b> |
| <b>LITERATURA.....</b>   | <b>110</b> |

# I ALGEBARSKI IZRAZI

Izrazi u kojima se pojavljuju konstante i promenljive, ali i njihovi zbrovi, razlike, proizvodi i količnici nazivaju se *algebarski izrazi*.

Za izraze  $A, B, C, D$  važe sledeći zakoni:

(1) *Distributivni zakon*

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A \cdot (B - C) = A \cdot B - A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$$

(2) *Razlika kvadrata*

$$A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$$

(3) *Kvadrat binoma*

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

1. Dati su polinomi  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 1$  i  $Q(x) = x^2 + x + 1$ . Odrediti polinome:

a)  $P(x) + Q(x)$

b)  $P(x) - Q(x)$

c)  $P(x) \cdot Q(x)$

**Rešenje:**

a)  $P(x) + Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1 + x^2 + x + 1 =$   
 $= x^3 + (2x^2 + x^2) + x + (-1 + 1) = x^3 + 3x^2 + x$

b)  $P(x) - Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1 - (x^2 + x + 1) =$   
 $= x^3 + 2x^2 - 1 - x^2 - x - 1 = x^3 + (2x^2 - x^2) - x + (-1 - 1) =$   
 $= x^3 + x^2 - x - 2$

$$\begin{aligned}
\text{c) } P(x) \cdot Q(x) &= (x^3 + 2x^2 - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \\
&= x^3x^2 + x^3x + x^3 + 2x^2x^2 + 2x^2x + 2x^2 - x^2 - x - 1 \\
&= x^5 + x^4 + x^3 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x^2 - x - 1 \\
&= x^5 + (x^4 + 2x^4) + (x^3 + 2x^3) + (2x^2 - x^2) - x - 1 \\
&= x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2 - x - 1
\end{aligned}$$

2. Odrediti parametre  $a, b, c$  tako da su polinomi  $P(x)$  i  $Q(x)$  identično jednaki:

a)  $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$  i  $Q(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$

b)  $P(x) = 2x^3 - x^2 + x + 4$  i  $Q(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$

**Rešenje:**

a) Dva polinoma su identično jednaka ako su koeficijenti uz odgovarajuće stepene jednaki.

$$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$$

$$Q(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$$

$$= ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$$

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow$$

$$2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c \Leftrightarrow$$

$$2 = a$$

$$-9 = b - 2a$$

$$13 = c - 2b$$

$$-6 = -2c$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo sledeće:

$$a = 2, b = -5, c = 3$$

b)  $P(x) = 2x^3 - x^2 + x + 4$

$$Q(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c$$

$$= ax^3 + (b + 2a)x^2 + (c + 2b)x + 2c$$

$$P(x)=Q(x) \Leftrightarrow$$

$$2x^3 - x^2 + x + 4 = ax^3 + (b + 2a)x^2 + (c + 2b)x + 2c \Leftrightarrow$$

$$2 = a$$

$$-1 = b + 2a \Rightarrow b = -5$$

$$1 = c + 2b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$4 = 2c \Rightarrow c = 2$$

Ovaj sistem nema rešenje, pa je nemoguće da dati polinomi budu jednaki.

3. Odrediti kvadrat izraza:

a)  $(3xy - 4)$

b)  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$

**Rešenje:**

Koristeći formulu za kvadrat binoma dobijamo sledeće:

a)  $(3xy - 4)^2 = (3xy)^2 - 2 \cdot 3xy \cdot 4 + 4^2 = 9x^2y^2 - 24xy + 16$

b)  $(a\sqrt{2} + b\sqrt{3})^2 = (a\sqrt{2})^2 + 2a\sqrt{2} \cdot b\sqrt{3} + (b\sqrt{3})^2$   
 $= 2a^2 + 2\sqrt{6}ab + 3b^2$

4. Skratiti razlomke:

a)  $\frac{a(x+2)^2}{2a^2(x+2)}$

b)  $\frac{a^2 - 9}{ab + 3b - a - 3}$

**Rešenje:**

a)  $\frac{a(x+2)^2}{2a^2(x+2)} = \frac{a(x+2)^{\cancel{2}}}{2a^{\cancel{2}}(\cancel{x+2})} = \frac{\cancel{a}(x+2)}{2a^{\cancel{2}}} = \frac{(x+2)}{2a}$

$$x \neq -2, a \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{a^2-9}{ab+3b-a-3} &= \frac{(a-3)(a+3)}{(ab-a)+(3b-3)} = \frac{(a-3)(a+3)}{a(b-1)+3(b-1)} \\ &= \frac{(a-3)\cancel{(a+3)}}{\cancel{(a+3)}(b-1)} = \frac{(a-3)}{(b-1)}, \quad a \neq -3, b \neq 1 \end{aligned}$$

5. Uprostiti racionalne izraze:

$$\text{a) } \frac{x-3}{x-5} - \frac{x+3}{x-5}$$

$$\text{b) } \frac{16x-x^2}{x^2-4} + \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{x+2}$$

**Rešenje:**

$$\text{a) } \frac{x-3}{x-5} - \frac{x+3}{x-5} = \frac{x-3-x-3}{x-5} = \frac{6}{5-x}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{16x-x^2}{x^2-4} + \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{x+2} &= \frac{16x-x^2}{(x-2)(x+2)} + \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{x+2} = \\ &= \frac{16x-x^2 - (3+2x)(x+2) - (2-3x)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{16x-x^2 - (3x+6+2x^2+4x) - (2x-4-3x^2+6x)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{16x\cancel{-x^2} - 3x - 6\cancel{-2x^2} - 4x - 2x + 4 + 3x^2 - 6x}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{1}{x+2}, \quad x \neq \pm 2 \end{aligned}$$

6. Uprostiti izraze:

$$a) \frac{a^2 - ab}{a^2 + ab} \cdot \frac{a^2b + ab^2}{ab}$$

$$b) \frac{4x^2y^2}{15b^3c} : \frac{8x^3y^3}{5c^2b^2}$$

**Rešenje:**

$$a) \frac{a^2 - ab}{a^2 + ab} \cdot \frac{a^2b + ab^2}{ab} = \frac{\cancel{a}(a-b)}{\cancel{a}(a+b)} \cdot \frac{\cancel{ab}(a+b)}{\cancel{ab}} = a-b, \quad ab \neq 0, a \neq -b$$

$$b) \frac{4x^2y^2}{15b^3c} : \frac{8x^3y^3}{5c^2b^2} = \frac{4\cancel{x^2}y^2}{15b^3c} \cdot \frac{5c^2b^2}{8x^3\cancel{y^3}}$$

$$= \frac{\cancel{4} \cancel{5} c^2 b^2}{\cancel{15}_3 b^3 \cancel{8}_2 xy} = \frac{c}{6bxy}, \quad b, c, x, y \neq 0$$

7. Uprostiti racionalni izraz:

$$\frac{a^2 - a - 6}{a^2 - 4} - \frac{a-1}{2-a} - 2$$

**Rešenje:**

$$\frac{a^2 - a - 6}{a^2 - 4} - \frac{a-1}{2-a} - 2 = \frac{a^2 - a - 6}{(a-2)(a+2)} - \frac{a-1}{2-a} - 2$$

$$= \frac{a^2 - a - 6 + (a-1)(a+2) - 2(a^2 - 4)}{(a-2)(a+2)}$$

$$= \frac{a^2 - a - 6 + (a^2 + 2a - a - 2) - 2a^2 + 8}{(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{\cancel{a^2} - \cancel{a} - \cancel{6} + \cancel{a^2} + 2\cancel{a} - \cancel{a} - \cancel{2} - 2\cancel{a^2} + \cancel{8}}{(a-2)(a+2)}$$

$$= \frac{0}{(a-2)(a+2)} = 0, \quad a \neq \pm 2$$

## II LINEARNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

**Linearna jednačina** po  $x$  je svaka jednačina sa nepoznatom  $x$  koja se ekvivalentnim transformacijama svodi na jednačinu oblika  $a \cdot x = b$ , gde su  $a, b$  dati realni brojevi.

(1) Ako je  $a \neq 0$  dobijamo ekvivalentnu jednačinu koja ima **jedinstveno rešenje**:

$$x = \frac{b}{a}.$$

(2) Ako je  $a = 0 \wedge b \neq 0$  jednačina nema rešenje. Za takvu jednačinu kažemo da je **nemoguća**.

(3) Ako je  $a = 0 \wedge b = 0$  svaki realan broj je rešenje jednačine. Za takvu jednačinu kažemo da je **neodređena**.

Jednačina  $\frac{A}{B} = 0$  ekvivalentna je sledećem:  $A = 0 \wedge B \neq 0$ .

**Linearna nejednačina** po  $x$  je nejednačina koja se ekvivalentnim transformacijama svodi na neki od oblika:  $a \cdot x < b$ ,  $a \cdot x \leq b$ ,  $a \cdot x > b$ ,  $a \cdot x \geq b$ , gde su  $a, b$  dati realni brojevi.

Nejednačina oblika  $\frac{A}{B} < 0$  je ekvivalentna sledećem:  $(A > 0 \wedge B < 0) \vee (A < 0 \wedge B > 0)$ .

Nejednačina oblika  $\frac{A}{B} > 0$  je ekvivalentna sledećem:  $(A > 0 \wedge B > 0) \vee (A < 0 \wedge B < 0)$ .

*Napomena:* Posebno treba obratiti pažnju na zapisivanje skupa rešenja nejednačina.

8. Koristeći ekvivalenciju  $\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \wedge B \neq 0$  rešiti jednačinu:

a)  $\frac{x-3}{x+1} = 0$

b)  $\frac{6x-1}{2+x} = 3$



**Rešenje:**

$$\text{a) } \frac{x-3}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x-3=0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x=3 \wedge x \neq -1$$

$$\text{b) } \frac{6x-1}{2+x} = 3$$

$$\frac{6x-1}{2+x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{6x-1-6-3x}{2+x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x-7}{2+x} = 0$$

$$\frac{3x-7}{2+x} = 0 \Leftrightarrow 3x-7=0 \wedge 2+x \neq 0 \Leftrightarrow 3x=7 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \wedge x \neq -2$$

9. Rešiti jednačinu:

$$\frac{9x+1}{4x-3} - 3 = \frac{1-x}{20x-15} + \frac{2x+5}{4x-3}$$

**Rešenje:**

$$\frac{9x+1}{4x-3} - 3 = \frac{1-x}{20x-15} + \frac{2x+5}{4x-3}$$

$$\frac{9x+1-12x+9}{4x-3} = \frac{1-x}{5(4x-3)} + \frac{2x+5}{4x-3}$$

$$\frac{-3x+10}{4x-3} = \frac{1-x+5(2x+5)}{5(4x-3)} \Leftrightarrow \frac{-3x+10}{4x-3} = \frac{1-x+10x+25}{5(4x-3)}$$

$$\frac{-3x+10}{4x-3} = \frac{9x+26}{5(4x-3)}$$

$$\frac{-3x+10}{4x-3} - \frac{9x+26}{5(4x-3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{5(-3x+10) - 9x - 26}{5(4x-3)} = 0$$

$$\frac{-15x+50-9x-26}{5(4x-3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-24x+24}{5(4x-3)} = 0$$

$$\frac{-24x+24}{5(4x-3)} = 0 \Leftrightarrow -24x+24=0 \wedge 5(4x-3) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -24x = -24 \wedge 4x-3 \neq 0$$

$$x = 1 \wedge 4x \neq 3 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x \neq \frac{3}{4}$$

10. Rešiti jednačinu:

$$\frac{1+3x}{3x-1} + \frac{1-3x}{1+3x} = \frac{12}{1-9x^2}$$

**Rešenje:**

$$\frac{1+3x}{3x-1} + \frac{1-3x}{1+3x} = \frac{12}{1-9x^2}$$

$$\frac{1+3x}{3x-1} + \frac{1-3x}{1+3x} = \frac{12}{(1-3x)(1+3x)} \quad / (1-3x)(1+3x) \neq 0$$

$$-(1+3x)^2 + (1-3x)^2 = 12$$

$$\cancel{1} - 6x - \cancel{9x^2} + \cancel{1} - 6x + \cancel{9x^2} = 12$$

$$-12x = 12$$

$$x = -1$$

11. Rešiti nejednačinu:

$$\frac{x-1}{x-2} < \frac{3}{2}$$

**Rešenje:**

$$\frac{x-1}{x-2} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} - \frac{3}{2} < 0$$

$$\frac{2(x-1) - 3(x-2)}{2(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-2-3x+6}{2(x-2)} < 0$$

$$\frac{-x+4}{2(x-2)} < 0$$

$$\frac{A}{B} < 0 \Leftrightarrow (A > 0 \wedge B < 0) \vee (A < 0 \wedge B > 0)$$

$$\frac{-x+4}{2(x-2)} < 0 \Leftrightarrow (-x+4 > 0 \wedge 2(x-2) < 0) \vee (-x+4 < 0 \wedge 2(x-2) > 0)$$

$$\Leftrightarrow (-x > -4 \wedge x < 2) \vee (-x < -4 \wedge x > 2)$$

$$\Leftrightarrow (x < 4 \wedge x < 2) \vee (x > 4 \wedge x > 2)$$

$$x < 4 \wedge x < 2 \Rightarrow x < 2, \quad x > 4 \wedge x > 2 \Rightarrow x > 4$$

Konačno rešenje:  $x < 2 \vee x > 4$  tj.  $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ .

12. Rešiti datu konjukciju (sistem):

$$2x + 3 \geq x + 1 \quad \wedge \quad x + 3 \geq 2x - 6$$

**Rešenje:**

$$2x + 3 \geq x + 1 \quad \wedge \quad x + 3 \geq 2x - 6$$

$$2x - x \geq 1 - 3 \quad \wedge \quad x - 2x \geq -6 - 3$$

$$x \geq -2 \quad \wedge \quad -x \geq -9$$

$$x \geq -2 \quad \wedge \quad x \leq 9$$

$$-2 \leq x \leq 9$$

13. Rešiti dvojnu nejednačinu po n:

$$-3 < \frac{n-1}{n+1} < 5$$

**Rešenje:**

$$-3 < \frac{n-1}{n+1} < 5$$

$$\frac{n-1}{n+1} > -3 \quad \wedge \quad \frac{n-1}{n+1} < 5$$

$$\frac{n-1}{n+1} + 3 > 0 \quad \wedge \quad \frac{n-1}{n+1} - 5 < 0$$

$$\frac{n-1+3n+3}{n+1} > 0 \quad \wedge \quad \frac{n-1-5n-5}{n+1} < 0$$

$$\frac{4n+2}{n+1} > 0 \quad \wedge \quad \frac{-4n-6}{n+1} < 0$$

Tražimo zajedničko rešenje za ove dve nejednačine.

$$\frac{4n+2}{n+1} > 0 \Leftrightarrow (4n+2 > 0 \wedge n+1 > 0) \vee (4n+2 < 0 \wedge n+1 < 0)$$

$$\Leftrightarrow (4n > -2 \wedge n > -1) \vee (4n < -2 \wedge n < -1)$$

$$\Leftrightarrow (n > \frac{-1}{2} \wedge n > -1) \vee (n < \frac{-1}{2} \wedge n < -1)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{-1}{2} \vee n < -1$$

$$\frac{-4n-6}{n+1} < 0 \Leftrightarrow (-4n-6 > 0 \wedge n+1 < 0) \vee (-4n-6 < 0 \wedge n+1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow (-4n > 6 \wedge n < -1) \vee (-4n < 6 \wedge n > -1)$$

$$\Leftrightarrow (n < \frac{-3}{2} \wedge n < -1) \vee (n > \frac{-3}{2} \wedge n > -1)$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{-3}{2} \vee n > -1$$

Tražimo presek:

$$(n > \frac{-1}{2} \vee n < -1) \wedge (n < \frac{-3}{2} \vee n > -1)$$

Konačno rešenje:

$$(n < -1 \wedge n < \frac{-3}{2} \Rightarrow n < \frac{-3}{2}) \vee (n > \frac{-1}{2} \wedge n > -1 \Rightarrow n > \frac{-1}{2})$$

Rešenje je :  $n < \frac{-3}{2} \vee n > \frac{-1}{2}$  tj.  $n \in (-\infty, \frac{-3}{2}) \cup (\frac{-1}{2}, +\infty)$

### III STEPENOVANJE I KORENOVANJE

**Stepenovanje** je matematička operacija u zapisu  $a^b$ , ( $a, b \in R$ ). U ovom zapisu  $a$  se naziva **osnova**, a  $b$  **eksponent**. Ako je  $n \in N$ , onda stepen predstavlja osnovu pomnoženu samom sobom  $n$  puta.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_n \quad n\text{-ti stepen broja } a.$$

*Napomena:* Stepenovanje ima viši prioritet od množenja.

Najvažnija **svojstva stepenovanja**:

1.  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2.  $a^m : a^n = a^{m-n}$  ( $a \neq 0$ )
3.  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4.  $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5.  $a^n : b^n = (a : b)^n$ ,  $b \neq 0$
6.  $a^0 = a^{n-n} = a^n : a^n = 1$
7.  $a^{-n} = a^{0-n} = \frac{1}{a^n}$

Neka je  $a$  realan i  $n$  prirodan broj. Svako rešenje jednačine  $x^n = a$  po  $x$  (ako postoji) naziva se  **$n$ -ti koren (korenovanje)** broja  $a$  u oznaci:  $x = \sqrt[n]{a}$ .

Najvažnija **svojstva korenovanja**:

1.  $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n\text{-neparan} \\ |a|, & n\text{-paran} \end{cases}$
2.  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
3.  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
4.  $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$
5.  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$$6. \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$7. \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$$

14. Uprostiti izraz:

$$\frac{27x^{-2}y^{-3}}{3^2x^{-4}y^2}$$

**Rešenje:**

$$\frac{27x^{-2}y^{-3}}{3^2x^{-4}y^2} = \frac{\cancel{3^3}x^{-2}y^{-3}}{\cancel{3^2}x^{-4}y^2} = \frac{3x^{-2}x^4}{y^2y^3} = \frac{3x^{-2+4}}{y^{2+3}} = \frac{3x^2}{y^5}$$

15. Uprostiti izraz:

$$\left(\frac{2^x + 2^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2^x - 2^{-x}}{2}\right)^2$$

**Rešenje:**

$$\begin{aligned} \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2^x - 2^{-x}}{2}\right)^2 &= \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{2} + \frac{2^x - 2^{-x}}{2}\right) \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{2} - \frac{2^x - 2^{-x}}{2}\right) = \\ \left(\frac{2^x + \cancel{2^x} + 2^x - \cancel{2^{-x}}}{2}\right) \left(\frac{\cancel{2^x} + 2^{-x} - \cancel{2^x} + 2^{-x}}{2}\right) &= \\ \frac{\cancel{2} \cdot 2^x \cdot \cancel{2} \cdot 2^{-x}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^x \cdot 2^{-x} = 2^{x-x} = 2^0 = 1 \end{aligned}$$

16. Ako je  $A = \frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}}$  i

$$B = \left(\frac{a^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} - \frac{b^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}}\right) (a^{-1} - b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})^{-1}$$

dokazati da je  $A = B^{-1}$ .

**Rešenje:**

$$A = \frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}} = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2}}{\frac{b - a}{ab}} = \frac{(b^2 - a^2)ab}{(b - a)a^2 b^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)\cancel{ab}}{\cancel{(b-a)}a^{\cancel{2}}b^{\cancel{2}}} = \frac{b+a}{ab}$$

$$B = \left( \frac{a^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} - \frac{b^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}} \right) (a^{-1} - b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})^{-1} =$$

$$= \left( \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} - \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right) \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^{-1} =$$

$$= \left( \frac{\frac{1}{a}}{\frac{b-a}{ab}} - \frac{\frac{1}{b}}{\frac{b+a}{ab}} \right) \left( \frac{b-a}{ab} \right) \left( \frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2} \right)^{-1} =$$

$$= \left( \frac{\cancel{ab}}{\cancel{a}(b-a)} - \frac{\cancel{ab}}{\cancel{b}(b+a)} \right) \left( \frac{b-a}{\cancel{ab}} \right) \left( \frac{a^{\cancel{2}}b^{\cancel{2}}}{b^2 + a^2} \right) =$$

$$= \left( \frac{b}{(b-a)} - \frac{a}{(b+a)} \right) \left( \frac{b-a}{1} \right) \left( \frac{ab}{b^2 + a^2} \right) =$$

$$= \left( \frac{b(b+a) - a(b-a)}{(b-a)(b+a)} \right) \left( \frac{b-a}{1} \right) \left( \frac{ab}{b^2 + a^2} \right) =$$

$$= \left( \frac{b^2 + \cancel{ba} - \cancel{ab} + a^2}{\cancel{(b-a)}(b+a)} \right) \left( \frac{\cancel{b-a}}{1} \right) \left( \frac{ab}{b^2 + a^2} \right) =$$

$$= \frac{\cancel{b^2 + a^2}}{(b+a)} \cdot \frac{ab}{\cancel{b^2 + a^2}} = \frac{ab}{b+a}$$

$$A = \frac{b+a}{ab}, \quad B = \frac{ab}{b+a}$$

$$B^{-1} = \left( \frac{ab}{b+a} \right)^{-1} = \frac{b+a}{ab} = A \quad \text{što je i trebalo dokazati.}$$

17. Izračunati:

$$5\sqrt{2} + 3\sqrt{8} - \sqrt{50} - \sqrt{98}$$

**Rešenje:**

S obzirom da je:

$$\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{98} = \sqrt{7 \cdot 7 \cdot 2} = 7\sqrt{2}$$

Dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} + 3\sqrt{8} - \sqrt{50} - \sqrt{98} &= 5\sqrt{2} + 3 \cdot 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = \\ &= 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

18. Obaviti naznačene operacije:

$$(x\sqrt{x})^3 \cdot 3\sqrt{x^3\sqrt{x}} : x^4 \sqrt[6]{x^5}$$

**Rešenje:**

$$\begin{aligned} (x\sqrt{x})^3 \cdot 3\sqrt{x^3\sqrt{x}} : x^4 \sqrt[6]{x^5} &= (\sqrt{xx^2})^3 \cdot 3\sqrt[3]{\sqrt[3]{xx^3}} : \sqrt[6]{x^5 x^{24}} = \\ &= (\sqrt{x^{2+1}})^3 \cdot 3\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^{3+1}}} : \sqrt[6]{x^{24+5}} = (\sqrt{x^3})^3 \cdot 3\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^4}} : \sqrt[6]{x^{29}} = \\ &= (\sqrt{x^{3 \cdot 3}}) \cdot 3\sqrt{(x^4)^{\frac{1}{3}}} : (x^{29})^{\frac{1}{6}} = \sqrt{x^9} \cdot 3((x^4)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} : (x^{29})^{\frac{1}{6}} = \\ &= (x^9)^{\frac{1}{2}} \cdot 3((x^4)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} : (x^{29})^{\frac{1}{6}} = x^{9 \cdot \frac{1}{2}} \cdot 3x^{4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} : x^{29 \cdot \frac{1}{6}} = \\ &= x^{\frac{9}{2}} \cdot 3x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{29}{6}} = 3 \cdot x^{\frac{9}{2} + \frac{2}{3} - \frac{29}{6}} = 3x^{\frac{27+4-29}{6}} = 3x^{\frac{2}{6}} = 3x^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

19. Racionalisati imeniocce razlomka:

$$\text{a) } \frac{2}{\sqrt{5}-2} \quad \text{b) } \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$



**Rešenje:**

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2}{\sqrt{5}-2} &= \frac{2}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{2(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} \\ &= \frac{2(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5})^2-2^2} = \frac{2(\sqrt{5}+2)}{5-4} = 2(\sqrt{5}+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \\ &= \frac{4-4\sqrt{3}+3}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{7-4\sqrt{3}}{4-3} = \frac{7-4\sqrt{3}}{1} = 7-4\sqrt{3} \end{aligned}$$

## IV KVADRATNA JEDNAČINA I KVADRATNA FUNKCIJA

**Kvadratna jednačina** je polinomijalna jednačina drugog stepena. Njen opšti oblik je  $ax^2 + bx + c = 0$  gde je  $x$  nepoznata, a koeficijenti  $a, b, c$  su realni brojevi i  $a \neq 0$ .

Kvadratna jednačina  $ax^2 + bx + c = 0$  sa realnim koeficijentima ima **dva rešenja**, koja se nazivaju **korenima**. Rešenja mogu biti realna ili kompleksna, a data su formulom:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

### Priroda rešenja kvadratne jednačine:

**Diskriminanta kvadratne jednačine**  $ax^2 + bx + c = 0$  je izraz  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Za kvadratnu jednačinu sa realnim koeficijentima važi:**

- 1) jednačina ima **dva realna i različita rešenja** ako i samo ako je  $\Delta > 0$
- 2) jednačina ima **jedno dvostruko realno rešenje** ako i samo ako je  $\Delta = 0$
- 3) jednačina ima **dva kompleksno konjugovana rešenja** ako i samo ako je  $\Delta < 0$

Pod **iracionalnom jednačinom** podrazumevamo jednačinu kod koje se nepoznata nalazi pod korenom.

Jednačina  $\sqrt{a(x)} = b(x)$  je ekvivalentna sistemu:  $a(x) = b^2(x) \wedge b(x) \geq 0$ .

**20.** Odrediti skup rešenja jednačine:

$$\frac{34}{4x^2 - 1} + \frac{2x+1}{1-2x} = \frac{2x-1}{2x+1}$$

**Rešenje:**

$$\frac{34}{4x^2 - 1} + \frac{2x+1}{1-2x} = \frac{2x-1}{2x+1}$$

$$\frac{34}{(2x-1)(2x+1)} + \frac{2x+1}{1-2x} - \frac{2x-1}{2x+1} = 0$$

$$\frac{34 - (2x+1)^2 - (2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)} = 0$$

$$\frac{34 - (4x^2 + 4x + 1) - (4x^2 - 4x + 1)}{(2x-1)(2x+1)} = 0$$

$$\frac{34 - 4x^2 - 4x - 1 - 4x^2 + 4x - 1}{(2x-1)(2x+1)} = 0$$

$$\frac{-8x^2 + 32}{(2x-1)(2x+1)} = 0 \quad / \cdot (2x-1)(2x+1) \neq 0$$

$$-8x^2 + 32 = 0 \quad / : 8$$

$$-x^2 + 4 = 0 \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$$

Skup rešenja je :  $\{-2, 2\}$ .

**21. Rešiti jednačinu:**

$$(2x-3)^2 + (2x-5)^2 = 4(x-3)^2 + 30$$

**Rešenje:**

$$(2x-3)^2 + (2x-5)^2 = 4(x-3)^2 + 30$$

$$4x^2 - 12x + 9 + 4x^2 - 20x + 25 = 4(x^2 - 6x + 9) + 30$$

$$8x^2 - 32x + 34 = 4x^2 - 24x + 36 + 30$$

$$8x^2 - 32x + 34 - (4x^2 - 24x + 36 + 30) = 0$$

$$8x^2 - 32x + 34 - 4x^2 + 24x - 66 = 0$$

$$4x^2 - 8x - 32 = 0 / : 4$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = 4, x_2 = -2$$

Skup rešenja:  $\{-2, 4\}$ .

22. Za koje je realne vrednosti  $x$  razlomak  $\frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1}$  manji od  $-1$ ?

**Rešenje:**

$$\frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} < -1$$

$$\frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} + 1 < 0$$

$$\frac{-x^2 + 2x - 5 + 2x^2 - x - 1}{2x^2 - x - 1} < 0$$

$$\frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 1} < 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

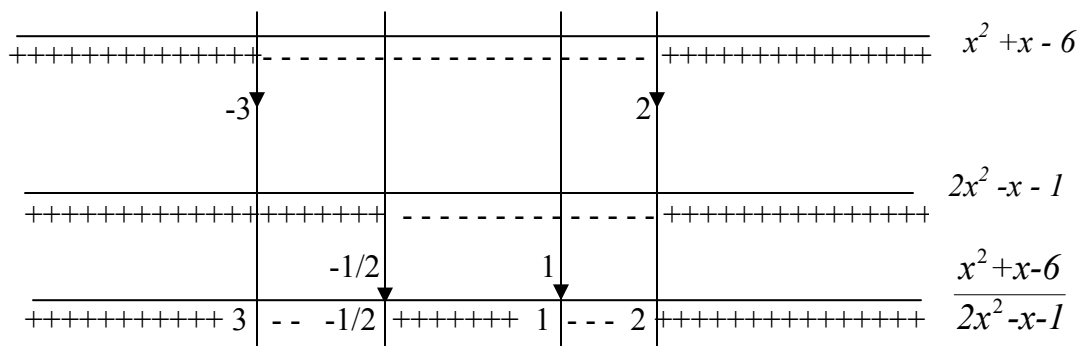
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = -3, x_2 = 2$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$$



Na osnovu preseka dolazimo do zaključka da je rešenje nejednačine:

$$x \in (-3, -\frac{1}{2}) \cup (1, 2).$$

23. Odrediti skup rešenja sistema:

$$x^2 + y^2 = 29$$

$$x + y = 7$$

**Rešenje:**

$$x^2 + y^2 = 29$$

$$x + y = 7$$

Na osnovu druge jednačine imamo da je  $y = 7 - x$ .

Zamenom  $y = 7 - x$  u prvu jednačinu dobijamo:

$$x^2 + (7 - x)^2 = 29$$

$$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 29$$

$$2x^2 - 14x + 20 = 0 / : 2$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = 5, x_2 = 2$$

S obzirom da je:

$$x_1 = 5 \Rightarrow y_1 = 7 - 5 = 2$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 7 - 2 = 5$$

Dakle, skup rešenja sistema je:

$$\{(x = 5, y = 2); (x = 2, y = 5)\}.$$

24. Odrediti realna rešenja sledeće jednačine:

$$\sqrt{25 - x^2} = 7 - x$$

**Rešenje:**

$$\sqrt{P} = Q \Leftrightarrow P = Q^2 \wedge Q \geq 0$$

$$\sqrt{25-x^2} = 7-x \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{25-x^2} = 7-x/2$$

$$25-x^2 = (7-x)^2 \wedge 7-x \geq 0$$

$$25-x^2 = 49-14x+x^2 \wedge 7-x \geq 0$$

$$-2x^2+14x-24=0/:(-2) \wedge 7 \geq x$$

$$x^2-7x+12=0 \wedge x \leq 7$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \wedge x \leq 7$$

$$x_1 = 4, x_2 = 3 \wedge x \leq 7$$

Realna rešenja jednačine su:  $x = 4 \vee x = 3$ .

**25. Rešiti jednačinu:**

$$\frac{2x}{x-9} - \frac{x^2+25}{x^2-81} = \frac{5}{x+9} - \frac{5}{x-9},$$

**Rešenje:**

$$\frac{2x}{x-9} - \frac{x^2+25}{x^2-81} = \frac{5}{x+9} - \frac{5}{x-9}$$

$$\frac{2x}{x-9} - \frac{x^2+25}{(x-9)(x+9)} = \frac{5}{x+9} - \frac{5}{x-9} / \cdot (x-9)(x+9) \neq 0$$

$$2x(x+9) - x^2 - 25 = 5(x-9) - 5(x+9)$$

$$2x^2 + 18x - x^2 - 25 = \cancel{5x} - 45 - \cancel{5x} - 45$$

$$x^2 + 18x - 25 + 90 = 0$$

$$x^2 + 18x + 65 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{324-260}}{2} = \frac{-18 \pm 8}{2}$$

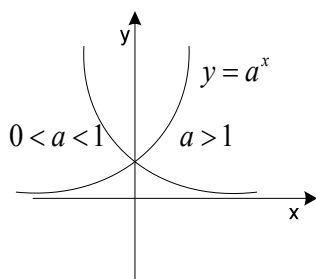
$$x_1 = -13, x_2 = -5.$$

## V EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA

Funkciju oblika  $f(x) = a^x$  gde je  $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$  nazivamo **eksponencijalnom**. Definisana je za svako realno  $x$  i obostrano jednoznačno preslikava skup realnih brojeva  $(-\infty, +\infty)$  na skup pozitivnih  $(0, +\infty)$ .

Ako je  $a > 1$  funkcija je **rastuća** na celom domenu tj.  $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) (x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2})$ .

Ako je  $0 < a < 1$  funkcija je monotono **opadajuća** tj.  $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) (x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2})$ .



Važe sledeći **eksponencijalni zakoni**:

1.  $a^0 = 1$
2.  $a^1 = a$
3.  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
4.  $(a^x)^y = a^{xy}$
5.  $\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$
6.  $a^x b^x = (ab)^x$ .

Jednačine kod kojih se nepoznata nalazi u izloziocu (eksponentu) nazivamo **eksponencijalne jednačine**. Eksponencijalne jednačine rešavamo najčešće, ako je moguće, svodenjem leve i desne strane jednačine na istu osnovu ili svodenjem leve i desne strane na isti izložilac.

U prvom slučaju imamo:

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ , gde je  $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ , a  $f(x), g(x)$  su funkcije argumenta  $x$ .

U drugom slučaju imamo:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = 0, \quad a, b > 0, \quad a, b \neq 1$$

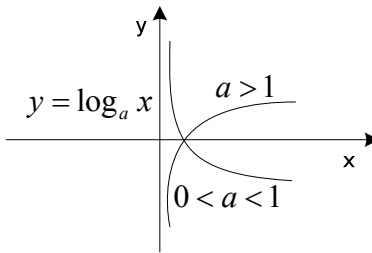
Eksponencijalna nejednačina oblika  $a^{f(x)} < a^{g(x)}$  (isto važi i za  $>, \geq, \leq$ ), ukoliko je  $a > 1$ , je ekvivalentna sledećem:  $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ .

Eksponencijalna nejednačina oblika  $a^{f(x)} < a^{g(x)}$  (isto važi i za  $>, \geq, \leq$ ), ukoliko je  $0 < a < 1$ , je ekvivalentna sledećem:  $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ .

Funkcija  $f(x) = a^x$  je bijekcija, pa postoji  $f^{-1}: R^+ \rightarrow R$ , koju zovemo **logaritamska funkcija** i pišemo  $f^{-1}(x) = \log_a x$ .

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \Leftrightarrow a^{\log_a x} = x, \quad x > 0$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \Leftrightarrow \log_a a^x = x, \quad x \in R$$



Važno je znati sledeće:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$$

**Logaritamska funkcija je inverzna eksponencijalnoj funkciji, pa su njihovi grafici simetrični u odnosu na pravu  $y = x$ .**

**Svojstva logaritamske funkcije:**

1.  $D = R^+$  je domen logaritamske funkcije, a kodomen je skup realnih brojeva  $R$

2.  $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$ ,  $x_1, x_2 > 0$

3.  $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$ ,  $x_1, x_2 > 0$

4.  $\log_a x^r = r \log_a x$ ,  $x > 0, r \in R$



$$5. \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ specijalno: } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$6. \log_{a^r} x = \frac{1}{r} \log_a x$$

$$7. \log_a 1 = 0$$

$$8. \log_a a = 1$$

9. Ako je  $a > 1$  funkcija je rastuća na celom domenu.

$$(\forall x_1, x_2 \in R) (x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2)$$

Ako je  $0 < a < 1$  funkcija je monotono opadajuća.

$$(\forall x_1, x_2 \in R) (x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2)$$

10. Ako je  $\log_a x_1 = \log_a x_2$  onda je  $x_1 = x_2$ .

**Logaritam za osnovu 10** označavamo sa  $\log$  i zovemo **dekadni logaritam**, a **logaritam za osnovu e** označavamo sa  $\ln$  i zovemo **prirodni logaritam**.

$$x^r = e^{\ln x^r} = e^{r \ln x} \quad x > 0, r \in R.$$

26. Rešiti eksponencijalnu jednačinu:

$$a) 2^{x-3} = 16$$

$$b) 9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$$

**Rešenje:**

$$a) 2^{x-3} = 16 \Rightarrow 2^{x-3} = 2^4$$

$$x-3 = 4 \Rightarrow x = 7$$

$$b) 9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3} \Rightarrow (3^2)^{-3x} = \left(\frac{1}{3^3}\right)^{x+3}$$

$$3^{-6x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3(x+3)} \Rightarrow 3^{-6x} = 3^{-3(x+3)} \Rightarrow 3^{-6x} = 3^{-3x-9}$$

$$-6x = -3x - 9 \Rightarrow -6x + 3x = -9$$

$$-3x = -9 \Rightarrow x = 3.$$

27. Rešiti jednačinu:

$$100 \cdot 10^{2x-2} = 1000^{\frac{x+1}{9}}$$

**Rešenje:**

$$100 \cdot 10^{2x-2} = 1000^{\frac{x+1}{9}} \Rightarrow 10^2 \cdot 10^{2x-2} = (10^3)^{\frac{x+1}{9}}$$

$$10^{2+2x-2} = 10^{\cancel{3} \cdot \frac{x+1}{\cancel{9}_3}} \Rightarrow 10^{2x} = 10^{\frac{x+1}{3}}$$

$$2x = \frac{x+1}{3} / \cdot 3$$

$$6x = x+1$$

$$5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

28. Rešiti nejednačinu:

$$5^{7x+3} > 5^{-3}$$

**Rešenje:**

( $y = a^x$  rastuća funkcija za  $a > 1$ )

$$5^{7x+3} > 5^{-3} \Rightarrow 7x+3 > -3$$

$$7x > -6 \Rightarrow x > -\frac{6}{7}$$

$$x \in \left(-\frac{6}{7}, +\infty\right)$$

29. Rešiti sistem:

$$2^x \cdot 3^y = 12$$

$$2^y \cdot 3^x = 18$$

**Rešenje:**

$$2^x \cdot 3^y = 12$$

$$2^y \cdot 3^x = 18$$

Podelimo prvu jednačinu drugom:

$$\frac{2^x \cdot 3^y}{2^y \cdot 3^x} = \frac{12}{18}$$

$$2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = \frac{2}{3}$$

$$2^{x-y} \cdot \frac{1}{3^{x-y}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2^{x-y}}{3^{x-y}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{2}{3}$$

$$x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1$$

Na ovaj način smo dobili vezu između  $x$  i  $y$ . Zamenom  $x = y + 1$  u prvu jednačinu dobijamo:

$$2^{1+y} \cdot 3^y = 12$$

$$2 \cdot 2^y \cdot 3^y = 12$$

$$2^y \cdot 3^y = 6 \Rightarrow (2 \cdot 3)^y = 6$$

$$6^y = 6 \Rightarrow y = 1$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 2$$

Rešenje sistema:  $(x = 2, y = 1)$ .

**30. Rešiti jednačinu:**

$$4^{x+1} + 4^x = 320$$

**Rešenje:**

$$4^{x+1} + 4^x = 320$$

$$4 \cdot 4^x + 4^x = 320$$

$$5 \cdot 4^x = 320 \Rightarrow 4^x = 64$$

$$4^x = 64 \Rightarrow 4^x = 4^3 \Rightarrow x = 3$$

31. Rešiti jednačinu:

$$3^{\frac{x-1}{2}} - 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 3^{\frac{x-3}{2}}$$

**Rešenje:**

$$3^{\frac{x-1}{2}} - 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 3^{\frac{x-3}{2}}$$

$$3^{\frac{x-1}{2}} - 3^{\frac{x-3}{2}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 2^{\frac{x+1}{3}}$$

$$3^{\frac{x-3}{2}} (3-1) = 2^{\frac{x-2}{3}} (1+2)$$

$$2 \cdot 3^{\frac{x-3}{2}} = 3 \cdot 2^{\frac{x-2}{3}}$$

$$\frac{3^{\frac{x-3}{2}}}{3} = \frac{2^{\frac{x-2}{3}}}{2} \Rightarrow 3^{\frac{x-5}{2}} = 2^{\frac{x-5}{3}}$$

$$(\sqrt{3})^{x-5} = (\sqrt[3]{2})^{x-5}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)^{x-5} = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)^{x-5} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)^0$$

$$x-5=0 \Rightarrow x=5$$

32. Izračunati vrednost izraza:

$$3 \log_5 25 + 2 \log_3 27 - 4 \log_2 8$$

**Rešenje:**

$$3 \log_5 25 + 2 \log_3 27 - 4 \log_2 8 =$$

$$3 \log_5 5^2 + 2 \log_3 3^3 - 4 \log_2 2^3 =$$

$$3 \cdot 2 \cdot \log_5 5 + 2 \cdot 3 \cdot \log_3 3 - 4 \cdot 3 \cdot \log_2 2 =$$

$$3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 6 + 6 - 12 = 0.$$

33. Rešiti jednačinu:

$$\log(5-x) + 2\log\sqrt{3-x} = 1$$

**Rešenje:**

$$\log(5-x) + 2\log\sqrt{3-x} = 1$$

Treba utvrditi za koje vrednosti promenljive  $x$  postoje logaritamske funkcije date u zadatku:

$$5-x > 0 \wedge 3-x > 0$$

$$x < 5 \wedge x < 3$$

Rešavamo jednačinu:

$$\log(5-x) + 2\log\sqrt{3-x} = 1$$

$$\log(5-x) + \log(\sqrt{3-x})^2 = 1$$

$$\log(5-x) + \log(3-x) = 1$$

$$\log_{10}(5-x)(3-x) = 1$$

$$(5-x)(3-x) = 10$$

$$15 - 5x - 3x + x^2 = 10$$

$$x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-20}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{11}}{2}$$

$$x_1 = 4 - \sqrt{11} \quad x_2 = 4 + \sqrt{11}$$

Treba proveriti da li ova rešenja zadovoljavaju uslov  $x < 3$ .

Zaključujemo da ovom intervalu pripada rešenje  $x_1 = 4 - \sqrt{11}$ , koje je rešenje naše jednačine.

34. Rešiti jednačinu:

$$\log_x(5x^2) \cdot \log_5^2 x = 1$$

**Rešenje:**

Oblast definisanosti :  $x > 0 \wedge x \neq 1$

$$\log_x(5x^2) \cdot \log_5^2 x = 1$$

$$(\log_x 5 + \log_x x^2) \cdot \log_5^2 x = 1$$

$$(\log_x 5 + 2 \log_x x) \cdot \log_5^2 x = 1$$

$$(\log_x 5 + 2) \cdot \log_5^2 x = 1$$

$$\left(\frac{1}{\log_5 x} + 2\right) \cdot \log_5^2 x = 1$$

$$\frac{\log_5^2 x}{\log_5 x} + 2 \cdot \log_5^2 x = 1$$

$$\log_5 x + 2 \log_5^2 x - 1 = 0$$

Uvodimo smenu  $\log_5 x = t$  i dobijamo sledeću kvadratnu jednačinu:

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = -1, t_2 = \frac{1}{2}$$

Za  $t_1 = -1$  imamo  $\log_5 x = -1 \Rightarrow x = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

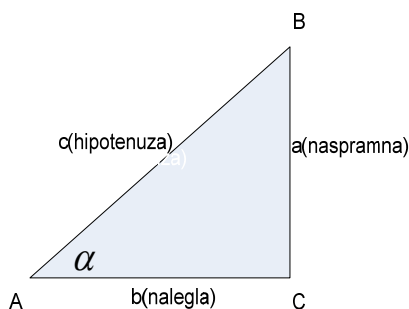
Za  $t_2 = \frac{1}{2}$  imamo  $\log_5 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

Rešenja jednačine su:  $x_1 = \frac{1}{5} \vee x_2 = \sqrt{5}$ .

## VI TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

**Trigonometrija** (lat. *trigonon-trougao*, *metron-mera*) je deo matematike koji izučava zavisnost između strana i uglova trougla u ravni ili na površini sfere. Pomoću trigonometrijskih funkcija moguće je odrediti nepoznatu dimenziju, ugao nagiba u matematičkim i tehničkim proračunima.

**Trigonometrijske funkcije su:** *sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans i kosekans.*



Odnos naspramne stranice i hipotenuze nazivamo **sinusnom funkcijom** ili **sinus** i zapisujemo kao *sin*.

Odnos nalegale stranice i hipotenuze nazivamo **kosinusnom funkcijom** ili **kosinus** i zapisujemo *cos*.

Odnos naspramne i nalegale stranice naziva se **tangens** ili skraćeno *tg*, a odnos nalegale i naspramne stranice naziva se **kotangens** ili skraćeno *ctg*.

**Kosekans** je recipročna vrednost sinusne funkcije ili skraćeno *cosec* (ili *csc*), a **sekans** je recipročna vrednost kosinusne funkcije ili skraćeno *sec*.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}, \quad \operatorname{sec} \alpha = \frac{c}{b}.$$

Iz navedenih definicija izvodimo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{\operatorname{sec} \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Sledeće osnovne relacije nazivaju se *osnovni trigonometrijski identiteti* ili *Pitagorini identiteti* zasnovani na Pitagorinoj teoremi:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha, 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

**Vrednosti trigonometrijskih funkcija:**

| Stepen | Radijan | Sin $\alpha$ | Cos $\alpha$ | Tg $\alpha$  | Ctg $\alpha$ | Sec $\alpha$  | Cosec $\alpha$ |
|--------|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|----------------|
| 0°     | 0       | 0            | 1            | 0            | $\infty$     | 1             | $\infty$       |
| 30°    | $\pi/6$ | $1/2$        | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}/3$ | $\sqrt{3}$   | $2\sqrt{3}/3$ | 2              |
| 45°    | $\pi/4$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1            | 1            | $\sqrt{2}$    | $\sqrt{2}$     |
| 60°    | $\pi/3$ | $\sqrt{3}/2$ | $1/2$        | $\sqrt{3}$   | $\sqrt{3}/3$ | 2             | $2\sqrt{3}/3$  |
| 90°    | $\pi/2$ | 1            | 0            | $\infty$     | 0            | $\infty$      | 1              |

**Osnovne trigonometrijske formule:**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1, \cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

**Funkcije zbira i razlike:**

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}$$



**Funkcije višestrukih uglova:**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - \sin^3 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$$

**Zbir i razlika funkcija:**

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \pm \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}, \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}$$

**Proizvod funkcija:**

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

**Funkcije polovine ugla:**

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

**Funkcije suprotnog ugla:**

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

**Trigonometrijske jednačine:**

|  | <i>Osnovna rešenja</i>                     | <i>Sva rešenja</i>   |
|--|--|--|
| $\sin \alpha = \sin \beta$                             | $\alpha = \beta$<br>$\alpha = \pi - \beta$ | $\alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$<br>$\alpha = \pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |
| $\cos \alpha = \cos \beta$                             | $\alpha = \beta$<br>$\alpha = -\beta$      | $\alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$<br>$\alpha = -\beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$      |
| $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$   | $\alpha = \beta$                           | $\alpha = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  |
| $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$ | $\alpha = \beta$                           | $\alpha = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  |

35. Dokazati sledeći identitet:

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

**Rešenje:**

I način:

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \alpha = (1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

II način:

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cancel{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

36. Dokazati sledeći identitet:

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

**Rešenje:**

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

37. Dokazati identitet:

$$1 - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

**Rešenje:**

$$1 - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$1 - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

$$1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}} - \frac{\cos^2 \alpha}{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}} = 1 - \frac{\sin^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \alpha + \cos \alpha - \sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} &= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha - (\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} \\
&= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha - (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} \\
&= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha - (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} \\
&= \frac{\cancel{(\sin \alpha + \cos \alpha)} (\cancel{1} - 1 + \sin \alpha \cos \alpha)}{\cancel{\sin \alpha + \cos \alpha}} = \sin \alpha \cos \alpha
\end{aligned}$$

38. Odrediti sva rešenja jednačine:

$$2 \sin^2 x + \sin x = 0$$

**Rešenje:**

$$2 \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\sin x(2 \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee 2 \sin x + 1 = 0$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x_k = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$2 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_m = \frac{7\pi}{6} + 2m\pi \vee x_n = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

39. Za koje  $\alpha$  važi formula:

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

**Rešenje:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \\
\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}
\end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$
$$\frac{|\sin \alpha|}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \Rightarrow |\sin \alpha| = \sin \alpha$$

Rešenje je:  $2k\pi \leq \alpha \leq (2k+1)\pi$ .

## VII POLIEDRI

**Poliedar** je geometrijsko telo ograničeno sa četiri ili više površi i kome su ivice prave duži. Poliedri se *dele* prema *konveksnosti*, *simetričnosti*, *oblicima površi koje ih čine*, *broju ivica koje se sastaju u jednom temenu*. Naziv se poliedru daje *prema broju površi* (tetraedar-4 površi, pentaedar-5, heksaedar-6,...) i prema obliku površi koje ga čine.

Najpoznatiji poliedri su **prizma** i **piramida**.

### Prizma

**Prizma** je geometrijsko telo koje se sastoji od dva paralelna i podudarna mnogougla i onoliko paralelograma koliko stranica ima jedan od tih mnogouglova. Mnogouglove nazivamo **osnove-baze prizme**, a paralelogrami su **bočne strane prizme**. Bočne strane prizme obrazuju **omotač prizme**. **Visina prizme** je duž koja je normalna na osnove prizme i čije krajnje tačke pripadaju ravnima osnova prizmi.

**Površina prizme** izražava se formulom:

$$P = 2B + M, \text{ gde je } B \text{ površina baze, a } M \text{ površina omotača.}$$

**Zapremina prizme** izražava se formulom:

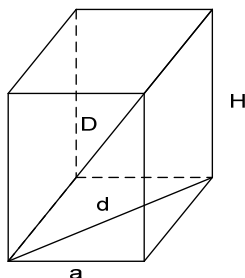
$$V = BH \text{ gde je } B \text{ površina baze, a } H \text{ visina prizme.}$$

#### Pravilna četvorostrana prizma

$$B = a^2$$

$$M = 4aH$$

$$D = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + H^2}$$



#### Kocka:

$$P = 6a^2$$

$$V = a^3$$

$$D = a\sqrt{3}$$

#### Kvadar:

$$P = 2(ab + ac + bc)$$

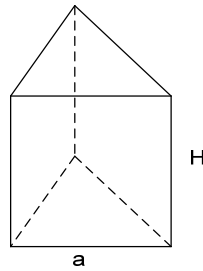
$$V = abc$$

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

### Pravilna trostrana prizma

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

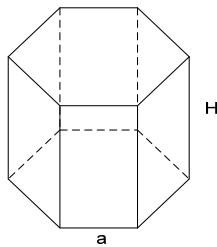
$$M = 3aH$$



### Pravilna šestostrana prizma

$$B = 6 \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$M = 6aH$$



### Piramida

**Piramida** je geometrijsko telo ograničeno delom jedne rogljaste površi i jednim mnogougлом. **Teme roglja** je vrh piramide. Mnogougao koji pripada presečenoj ravni je **osnova piramide**, a stranice tog mnogougla su osnovne **ivice piramide**. Odsečki ivica roglja su **bočne ivice piramide**, a trouglovi određeni stranama roglja su **bočne strane piramide**. Bočne strane piramide čine **omotač piramide**. Duž normalna na osnovu piramide, čija je jedna krajnja tačka vrh piramide, a druga pripada ravni osnove, naziva se **visina piramide**. *Visina bočne strane naziva se apotema.*

**Površina piramide** izražava se formulom:

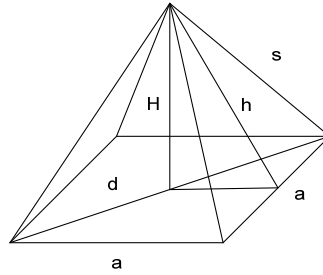
$$P = B + M, \text{ gde je } B \text{ površina baze, a } M \text{ površina omotača.}$$

**Zapremina piramide** izražava se formulom:

$$V = \frac{1}{3}BH, \text{ gde je } B \text{ površina baze, a } H \text{ visina prizme.}$$

### Pravilna četverostrana piramida

$$B = a^2$$
$$M = 4 \frac{ah}{2} = 2ah$$



### Važne relacije:

$$s^2 = H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

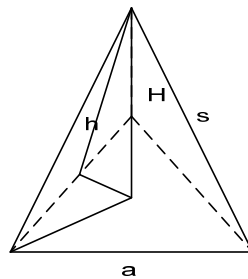
$$s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

gde je  $a$  osnovna ivica,  $s$  bočna ivica,  $h$  visina bočne strane,  $d$  dijagonala osnove.

### Pravilna trostrana piramida

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$M = 3 \frac{ah}{2}$$



### Važne relacije:

$$s^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

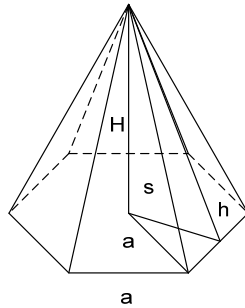
$$s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$



## Pravilna šestostrana piramida

$$B = 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$M = 6 \frac{ah}{2} = 3ah$$



**Važne relacije:**

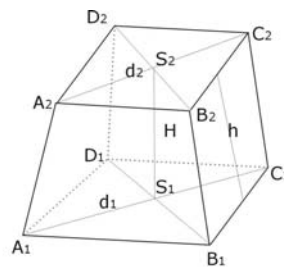
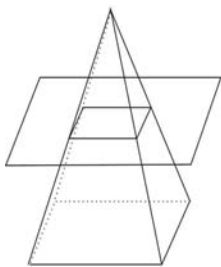
$$s^2 = H^2 + a^2$$

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

## Zarubljena piramida

Ako se  $n$ -tostrana piramida preseče sa ravni koja je paralelna ravni osnove dobija se mnogougao homotetičan sa osnovom. *Deo piramide između tih homotetičkih površi jeste  $n$ -tostrana zarubljena piramida.*



**Površina zarubljene piramide** se izražava formulom:

$P = B_1 + B_2 + M$ , gde su  $B_1, B_2$  površina donje i gornje osnove, a  $M$  površina omotača.

**Zapremina zarubljene piramide** izražava se formulom:

$$V = \frac{H}{3} (B_1 + \sqrt{B_1 \cdot B_2} + B_2)$$

40. Pravilna četverostrana prizma ima omotač  $8\text{m}^2$  i dijagonalu  $3\text{m}$ . Izračunati njenu zapreminu.

**Rešenje:**

$$M = 8\text{m}^2$$

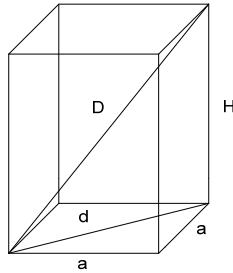
$$D = 3\text{m}$$

$$V = ?$$

$$V = BH = a^2 H$$

$$M = 4aH$$

$$4aH = 8 \Rightarrow H = \frac{2}{a}$$



Dijagonala osnove je  $d = a\sqrt{2}$ , pa primenom Pitagorine teoreme dobijamo:

$$d^2 + H^2 = D^2$$

$$(a\sqrt{2})^2 + H^2 = 3^2$$

$$2a^2 + H^2 = 9$$

$$2a^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 9$$

$$2a^2 + \frac{4}{a^2} = 9 \cdot a^2$$

$$2a^4 + 4 = 9a^2$$

$$2a^4 - 9a^2 + 4 = 0$$

Uvodimo smenu  $a^2 = t$ , pa poslednja jednačina postaje:

$$2t^2 - 9t + 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4}$$

$$t_1 = 4, t_2 = \frac{1}{2}$$

$$t_1 = 4 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$a_1 = 2 \Rightarrow H_1 = \frac{2}{2} = 1$$

$$V_1 = a_1^2 H_1 = 4 \cdot 1 = 4m^3$$

$$t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow H_2 = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$$

$$V_2 = a_2^2 H_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}m^3$$

41. Površina prave trostrane prizme jednaka je  $1440 \text{ cm}^2$ , a njena visina je  $16 \text{ cm}$ . Izračunati osnovne ivice prizme, ako se one odnose kao  $17:10:9$ .

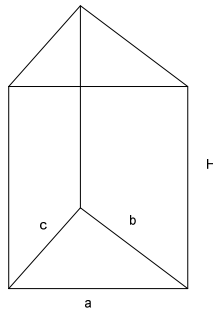
**Rešenje:**

$$P = 1440 \text{ cm}^2$$

$$H = 16 \text{ cm}$$

$$a : b : c = 17 : 10 : 9$$

$$a, b, c = ?$$



$$P = 2B + M$$

$$1440 = 2B + M$$

$$a : b : c = 17 : 10 : 9 = k$$

$$a = 17k, b = 10k, c = 9k$$

Površinu osnove izračunaćemo primenom Heronovog obrasca:

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ gde je } s = \frac{a+b+c}{2} \text{ poluobim trougla.}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{17k+10k+9k}{2} = 18k$$

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{18k(18k-17k)(18k-10k)(18k-9k)} = \\ = \sqrt{18k \cdot k \cdot 8k \cdot 9k} = 36k^2$$

$$M = (a+b+c)H = (17k+10k+9k) \cdot 16 = 36k \cdot 16 = 576k$$

$$P = 2B + M$$

$$1440 = 2 \cdot 36k^2 + 576k$$

$$72k^2 + 576k - 1440 = 0 / : 72$$

$$k^2 + 8k - 20 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{2} = \frac{-8 \pm 12}{2}$$

$$k_1 = -10, k_2 = 2$$

Odbacujemo negativno rešenje, tj. rešenje poslednje jednačine je  $k_2 = 2$ .

$$a = 34, b = 20, c = 18.$$

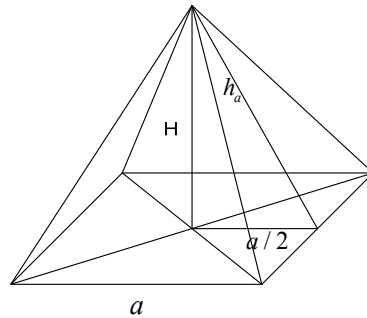
42. Date su osnovna ivica  $a = 10\text{cm}$  i visina  $H = 12\text{cm}$  pravilne četverostrane piramide. Odrediti njenu površinu i zapreminu.

**Rešenje:**

$$a = 10\text{cm}$$

$$H = 12\text{cm}$$

$$P, V = ?$$



$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}a^2H$$

$$V = \frac{1}{3}10^2 \cdot 12 = 400\text{cm}^3$$

$$P = B + M = a^2 + 4 \frac{ah_a}{2} = a^2 + 2ah_a$$

Treba odrediti visinu bočne strane. Primenjujemo Pitagorinu teoremu:

$$H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_a^2$$

$$12^2 + 5^2 = h_a^2$$

$$169 = h_a^2 \Rightarrow h_a = 13$$

$$P = a^2 + 2ah_a = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 13 = 360\text{cm}^2$$

43. Osnovne ivice pravilne trostrane zarubljene piramide su 2m i 6m. Bočna strana nagnuta je prema većoj osnovi pod uglom od  $60^\circ$ . Izračunati zapreminu te piramide.

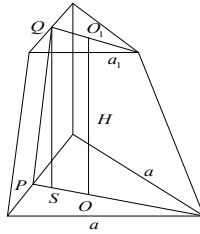
**Rešenje:**

$$a = 6m$$

$$a_1 = 2m$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$V = ?$$



$$V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$$

$$H = ?$$

$$OP = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \frac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$QO_1 = \frac{1}{3} \frac{a_1\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

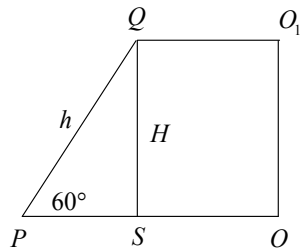
$$PS = PO - QO_1$$

$$PS = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Iz trougla  $PSQ$  imamo sledeće:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow H = \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2$$

$$H = 2$$



$$B_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$\sqrt{B_1 B_2} = \sqrt{9\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

$$V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$$

$$V = \frac{2}{3}(9\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + \sqrt{3})$$

$$V = \frac{2}{3}13\sqrt{3} = \frac{26\sqrt{3}}{3} m^3$$

44. Osnova piramide je pravougaonik čija je površina  $S$  i ugao između dijagonala  $60^\circ$ . Odrediti zapreminu piramide ako su bočne ivice nagnute prema ravni osnove pod uglom od  $45^\circ$ .

**Rešenje:**

$$B = S$$

$$\angle d_1 O d_2 = 60^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$V = ?$$

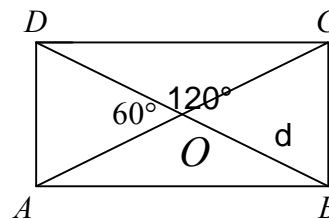
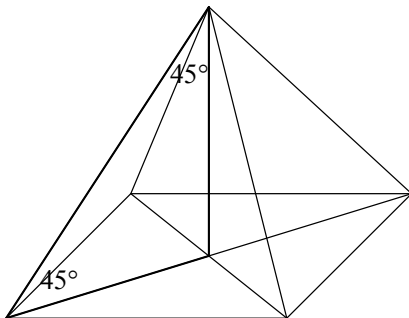
$$V = \frac{1}{3}BH$$

$$H = \frac{d}{2}$$

$$B = 2P_{BOC} + 2P_{ABO}$$

$$B = 2 \frac{\frac{d}{2} \frac{d}{2} \sin 60^\circ}{2} + 2 \frac{\frac{d}{2} \frac{d}{2} \sin 120^\circ}{2}$$

$$B = \frac{d^2 \frac{\sqrt{3}}{2}}{4} + \frac{d^2 \frac{\sqrt{3}}{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} d^2$$



$$\frac{\sqrt{3}}{4}d^2 = S$$

$$4S = \sqrt{3}d^2 \Rightarrow d^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}} \Rightarrow d = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$$

$$H = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}} \Rightarrow V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}S \frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{S\sqrt{S}}{9\sqrt[4]{27}}$$

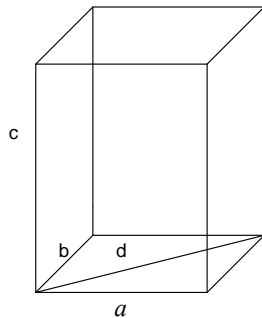
45. Ivice pravouglog paralelepipeda  $a, b, c$ , koje polaze iz jednog temena, odnose se kao  $m:n:p$ , a dijagonala osnove  $(a, b)$  je  $d$ . Izračunati površinu i zapreminu paralelepipeda.

**Rešenje:**

$$a : b : c = m : n : p$$

$$d$$

$$P, V = ?$$



$$a : b : c = m : n : p = k$$

$$a = mk$$

$$b = nk$$

$$c = pk$$

$$a^2 + b^2 = d^2$$

$$k^2m^2 + k^2n^2 = d^2$$

$$k^2(m^2 + n^2) = d^2$$

$$k^2 = \frac{d^2}{m^2 + n^2} \Rightarrow k = \frac{d}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$a = \frac{md}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$b = \frac{nd}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$c = \frac{pd}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

$$P = 2(ab + bc + ac)$$

$$P = 2 \left( \frac{md}{\sqrt{m^2 + n^2}} \frac{nd}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \frac{nd}{\sqrt{m^2 + n^2}} \frac{pd}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \frac{md}{\sqrt{m^2 + n^2}} \frac{pd}{\sqrt{m^2 + n^2}} \right) =$$

$$P = 2 \frac{mnd^2 + npd^2 + mpd^2}{m^2 + n^2} = \frac{2d^2(mn + np + mp)}{m^2 + n^2}$$

$$V = abc = \frac{md}{\sqrt{m^2 + n^2}} \frac{nd}{\sqrt{m^2 + n^2}} \frac{pd}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{mnpd^3}{\sqrt{(m^2 + n^2)^3}}$$



## VIII OBRTNA TELA

**Obrtna površ** je površ koju obrazuje jedna linija koja se rotira oko jedne stalne prave. Linija koja izvodi kretanje naziva se **izvodnica**, a stalna prava **osa rotacije**. Telo ograničeno jednom obrtnom površi ili delom obrtne površi i ravnima normalnim na osu rotacije naziva se **obrotno ili rotaciono telo**.

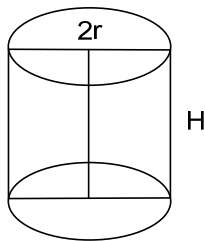
### Valjak

Površ obrazovana kretanjem prave koja ostaje stalno paralelna samoj sebi naziva se **cilindrična površ**. **Valjak** je geometrijsko telo ograničeno sa dva kruga u paralelnim ravnima i delom cilindrične površi, čije su izvodnice normalne na ravni tih krugova. Krugovi su **osnove valjka**. **Omotač valjka** naziva se deo cilindrične površi između ravni osnova. **Visina valjka** je duž normalna na osnove sa krajnjim tačkama u osnovama.

**Površina valjka** izražava se formulom:

$$P = 2B + M$$

$$B = r^2\pi, M = 2r\pi H$$



gde je  $B$  površina osnove,  $M$  površina omotača valjka,  $r$  poluprečnik osnove,  $H$  visina valjka.

**Zapremina valjka** izražava se formulom:

$$V = BH$$

**Osni presek valjka** je pravougaonik sa stranicama  $H$  i  $2r$  i dobija se presekom valjka i ravni koja sadrži osu valjka.

**Poprečni presek valjka** je krug poluprečnika  $r$  i nastaje presekom valjka i ravni koja je paralelna ravni osnove.

**Ravnostrani valjak** je onaj valjak kod koga je  $2r = H$ .

## Kupa

Ako se prava kreće tako da stalno prolazi kroz jednu istu tačku, onda se nastala površ naziva **konusna površ**. Tačka kroz koju prolazi prava naziva se **vrh konusne površi**, a sama pokretna prava **izvodnica** ili **generatrisa**.

*Prava kružna konusna površ je obrtna površ čija osa rotacije spaja vrh i centar kruga.*

*Ako se prava kružna konusna površ preseče jednom ravni normalnoj na osu, onda ta ravan i deo kružne konusne površi obrazuju jedno obrtno telo koje se naziva prava kružna kupa ili samo **prava kupa**.*

Deo presečene ravni ograničen konusnom površi (krug) je **osnova kupe**, a deo konusne površi između vrha i osnove je **omotač kupe**. Izvodnice konusne površi, koje pripadaju omotaču kupe, nazivaju se **izvodnice kupe**. Rastojanje između vrha i ravni osnove kupe je **visina kupe**, a duž koja spaja vrh sa središtem osnove **osa kupe**. Osa prave kupe je ujedno i njena **visina**.

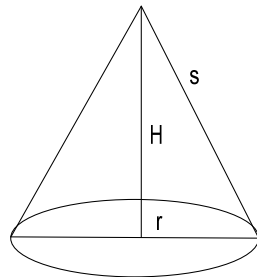
*Zarubljena kupa je deo kupe ograničen osnovom kupe, jednom ravni paralelnom sa osnovom i odgovarajućim delom konusne površi. Osnova pune kupe, iz koje je dobijena zarubljena kupa, i krug u preseku kupe i date ravni, nazivaju se **osnove zarubljene kupe**.*

**Površina kupe** izražava se formulom:

$$P = B + M$$

$$B = r^2 \pi$$

$$M = r \pi s$$



**Zapremina kupe** izražava se formulom:

$$V = \frac{1}{3} BH$$

**Važna relacija:**

$$s^2 = r^2 + H^2$$

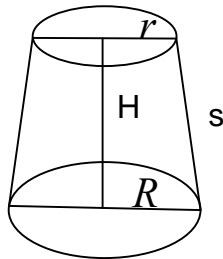
### Površina zarubljene kupe:

$P = B_1 + B_2 + M$  gde su  $B_1, B_2$  površina donje i gornje osnove sa poluprečnicima  $R$  i  $r$ , a  $M$  površina omotača.

$$B_1 = R^2 \pi$$

$$B_2 = r^2 \pi$$

$$M = (R + r)\pi s$$



### Zapremina zarubljene kupe:

$$V = \frac{1}{3} H (B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$$

$$V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

## Lopta

Geometrijsko mesto tačaka u prostoru podjednako udaljenih od jedne iste tačke (centra) jeste jedna površ, koja se naziva **sfera** ili **loptina površ**.

*Telo ograničeno sferom naziva se lopta.*

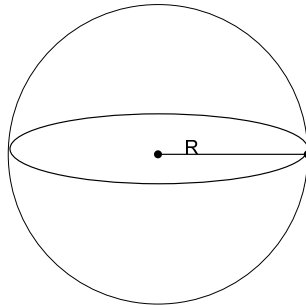
Duž koja spaja centar sa jednom tačkom sfere jeste njen **poluprečnik (radijus)**, a duž koja spaja dve proizvoljne tačke sfere je **tetiva sfere**. Tetiva koja prolazi kroz centar sfere naziva se **prečnik (dijametar)**.

Sfera može nastati i rotiranjem polukruga oko njegovog prečnika. U tom slučaju centar polukruga je istovremeno i centar sfere, a njegov poluprečnik je i poluprečnik sfere.

Prema tome, *sfera je obrtna površ, a lopta obrtno telo.*

**Površina lopte** izražava se formulom:

$P = 4R^2\pi$ , gde je  $R$  poluprečnik lopte.



**Zapremina lopte** se izražava formulom:  $V = \frac{4}{3}R^3\pi$

**46.** Koliko je kvadratnih metara metalnog lima potrebno za izradu cilindričnog dimnjaka visine 18m i prečnika 65cm?

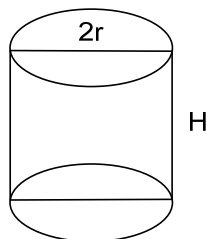
**Rešenje:**

$$H = 18m$$

$$2r = 65cm \Rightarrow$$

$$r = 32.5cm = 0.325m$$

$$M = ?$$



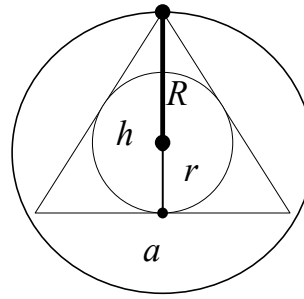
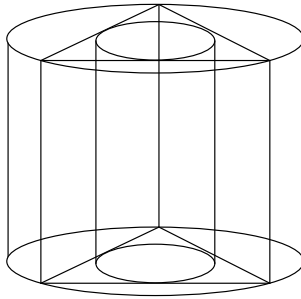
$$M = 2r\pi H$$

$$M = 0.65 \cdot 3.14 \cdot 18$$

$$M = 36.74m^2$$

**47.** U kružnom valjku upisana je trostrana prizma, a u prizmu je upisan valjak. Odrediti razmeru zapremina tih valjaka.

**Rešenje:**



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{1}{3}h \Rightarrow r = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R = \frac{2}{3}h \Rightarrow R = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$V_1 = B_1 H = r^2 \pi H$$

$$V_2 = B_2 H = R^2 \pi H$$

$$V_1 : V_2 = \frac{r^2 \pi H}{R^2 \pi H} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{3a^2}{36} = \frac{3a^2 \cdot \cancel{9}}{3a^2 \cdot \cancel{36}_4} = \frac{1}{4}$$

$$V_1 : V_2 = 1 : 4$$

**48.** Izračunati površinu i zapreminu kupe, ako je njena izvodnica za 1 cm duža od visine, a prečnik osnove je 1 dm.

**Rešenje:**

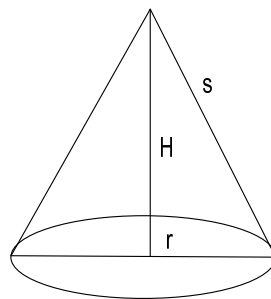
$$2r = 1dm \Rightarrow r = 5cm$$

$$H + 1cm = s$$

$$P, V = ?$$

$$P = B + M$$

$$P = r^2 \pi + \pi r s$$



$$r^2 + H^2 = s^2 \Rightarrow r^2 + H^2 = (H + 1)^2 \Rightarrow 5^2 + H^2 = H^2 + 2H + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2H = 24 \Rightarrow H = 12\text{cm} \Rightarrow s = H + 1 = 13\text{cm}$$

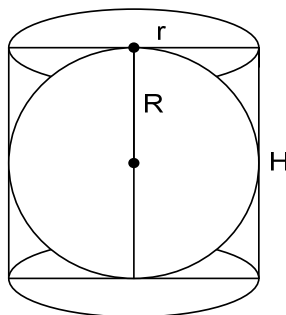
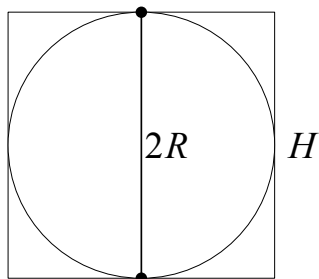
$$P = 5^2 \pi + \pi \cdot 5 \cdot 13 = 25\pi + 65\pi = 90\pi\text{cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi H = \frac{1}{3} 5^2 \cdot \pi \cdot 12 = 100\pi\text{cm}^3$$

49. Površina lopte jednaka je površini omotača valjka opisanog oko te lopte. Dokazati.

**Rešenje:**

$$P_L = M_V, \quad 2R = H, \quad P_L = 4R^2\pi$$



$$M_V = 2R\pi H = 2R\pi \cdot 2R = 4R^2\pi = P_L$$

$$\Rightarrow P_L = M_V$$

50. Visina kupe je 12cm, a površina osnog preseka je 42 cm<sup>2</sup>. Odrediti površinu osnove i izvodnicu kupe.

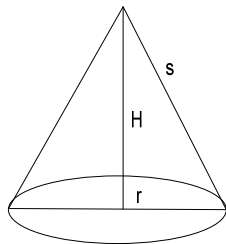
**Rešenje:**

$$H = 12\text{cm}$$

$$P_{OP} = 42\text{cm}^2$$

$$P_{OP} = \frac{2rH}{2} = rH$$

$$42 = r \cdot 12 \Rightarrow r = 3.5\text{cm}$$



$$B = r^2 \pi = 3.5^2 \pi = 12.25 \cdot 3.14 = 38.465\text{cm}^2$$

$$s = \sqrt{r^2 + H^2} = \sqrt{(3.5)^2 + 12^2} = \sqrt{12.25 + 144} = \sqrt{156.25} = 12.5\text{cm}$$

## IX ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNI

### Tačka

#### 1. Rastojanje između dve tačke

Neka su u odnosu na izabrani koordinatni sistem  $XOY$  date tačke  $M_1(x_1, y_1)$  i  $M_2(x_2, y_2)$ . Njihovo rastojanje određuje se pomoću formule:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

#### 2. Deljenje duži u datoj razmeri. Koordinate sredine duži.

Ako je tačka  $M(x, y)$  unutrašnja tačka duži  $M_1M_2$  ( $M_1(x_1, y_1)$  i  $M_2(x_2, y_2)$ ) i ako je data razmera  $\lambda = \frac{MM_1}{MM_2}$  u kojoj tačka  $M$  deli duž  $M_1M_2$ , onda se koordinate tačke  $M$  određuju obrascima:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Ako je tačka  $M$  središte duži  $M_1M_2$  ( $\lambda = 1$ ) njene koordinate su:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

#### 3. Površina trougla

Neka su  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3)$  temena datog trougla  $M_1M_2M_3$  određena pomoću naznačenih koordinata u odnosu na izabrani pravougli koordinatni sistem  $XOY$ . Tada je površina trougla data obrascem:

$$P = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

### Prava linija

1. Jednačina  $y = kx + n$  predstavlja **eksplicitni oblik jednačine prave**;  $k = \operatorname{tg} \alpha$  je *koeficijent pravca prave*;  $\alpha$  je *ugao* koji prava gradi sa pozitivnim delom  $x$ -ose, a  $n$  je *odsečak* koji prava odseca na ordinatnoj ( $y$ ) osi. Odsečak koji prava odseca na apscisnoj ( $x$ ) osi je  $m = -\frac{n}{k}$ .

2. Jednačina  $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ , ( $m \neq 0, n \neq 0$ ) predstavlja **segmentni oblik jednačine prave**;  $m$  i  $n$  su odsečki prave na koordinatnim osama.
3. Jednačina  $Ax + By + C = 0$ , naziva se **opšti oblik jednačine prave** ili Dekartova jednačina prave linije, gde su  $A, B$  i  $C$  realni parametri.
4. **Tangens ugla  $\varphi$ , koji grade dve prave koje se seku**, a čiji su koeficijenti  $k_1$  i  $k_2$  određuje se obrascem:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \text{ (orijentisani ugao); } \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \text{ (apsolutni ugao);}$$

5. Koeficijenti pravaca  $k_1$  i  $k_2$  **paralelnih pravih** zadovoljavaju uslov  $k_1 = k_2$ .
6. Dve **prave su normalne** ako njihovi koeficijenti pravaca zadovoljavaju uslov:  $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ .
7. **Jednačina pramena pravih** koje prolaze kroz datu tačku  $M(x_1, y_1)$ , a imaju proizvoljni koeficijent  $k$  ima oblik:  $y - y_1 = k(x - x_1)$ .
8. Jednačina  $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$  predstavlja **pravu liniju koja prolazi kroz dve date tačke**  $M_1(x_1, y_1)$  i  $M_2(x_2, y_2)$ ; izraz  $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  je njen **koeficijent pravca**.
9. **Odstojanje  $d$  tačke  $M(x_1, y_1)$  od prave  $Ax + By + C = 0$**  dato je formulom:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

## Kružnica

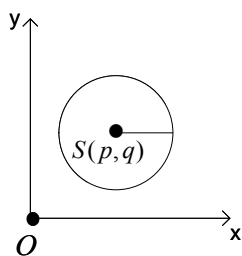
**Kružnica** je skup tačaka u ravni čija su rastojanja od jedne stalne tačke, jednaka datoj veličini.

### Jednačina kružnice

Opšta jednačina kružnice je:

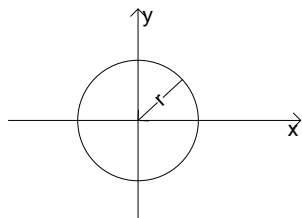
$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$





gde je  $S(p, q)$  *centar kružnice*, a  $r$  *poluprečnik*. Ako se centar kružnice nalazi u koordinatnom početku onda je  $p = q = 0$ , pa jednačina kružnice ima oblik:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



Ako je jednačina kružnice data u obliku

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

tada je

$$p = -\frac{d}{2}, q = -\frac{e}{2} \text{ i } r = \sqrt{p^2 + q^2 - f}$$

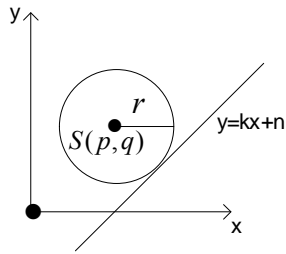
### Prava i kružnica

Prava  $y = kx + n$  je *tangenta kružnice*  $x^2 + y^2 = r^2$ , ako je zadovoljena relacija

$$r^2(k^2 + 1) = n^2.$$

Prava  $y = kx + n$  je *tangenta kružnice*  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ , ako je zadovoljena relacija:

$$r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2.$$



Prava  $Ax + By + C = 0$  je *tangenta kružnice*  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ , ako je zadovoljena relacija:

$$r^2 = \frac{(Ap + Bq + C)^2}{A^2 + B^2}.$$

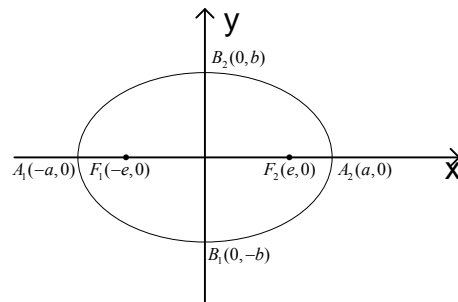
Ako je  $M(x_1, y_1)$  neka tačka kružnice  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ , **jednačina tangente kružnice u toj tački** glasi:

$$(x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q) = r^2.$$

## Elipsa

**Elipsa** je skup tačaka u ravni s osobinom da je zbir rastojanja ma koje tačke od dveju datih tačaka stalan broj.

Zbir rastojanja  $r_1 + r_2 = 2a$ ,  $r_1$  i  $r_2$  su **potezi elipse**; stalne tačke  $F_1(-e, 0)$  i  $F_2(e, 0)$ , čije je rastojanje  $F_1F_2 = 2e$  nazivaju se **žížama elipse**. Duži  $A_1A_2 = 2a$  i  $B_1B_2 = 2b$  su **velika i mala osa**; a duži  $OA_2 = a$  i  $OB_2 = b$  su **poluose elipse**. Broj  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ , ( $e < a$ ) je **linearna ekscentričnost elipse**.



## Jednačina elipse

Jednačina  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ili  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  ( $a > b$ ) predstavlja **centralnu jednačinu elipse**.

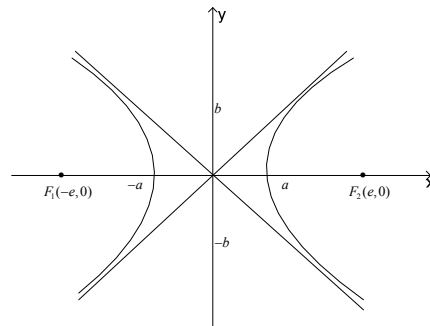
**Prava**  $y = kx + n$  **dodiruje elipsu**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ako je  $a^2k^2 + b^2 = n^2$ .

**Jednačina tangente elipse**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  **u njenoj tački**  $M(x_1, y_1)$  je  $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ .

## Hiperbola

**Hiperbola** je skup tačaka u ravni s osobinom da je razlika rastojanja ma koje tačke od dveju datih tačaka stalan broj.

Razlika rastojanja označava se sa  $r_1 - r_2 = 2a$ , ( $a > 0$ ),  $r_1$  i  $r_2$  su **potezi hiperbole**; stalne tačke  $F_1(-e, 0)$  i  $F_2(e, 0)$ , čije je rastojanje  $F_1F_2 = 2e$  nazivaju se **žžama hiperbole** ( $a < e$ ). Broj  $e = \sqrt{a^2 + b^2}$  je **linearni ekscentritet hiperbole**.



## Jednačina hiperbole

Jednačina  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ili  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  predstavlja **centralnu jednačinu hiperbole**.

**Prava**  $y = kx + n$  **dodiruje hiperbolu**  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ako je  $a^2k^2 - b^2 = n^2$ .

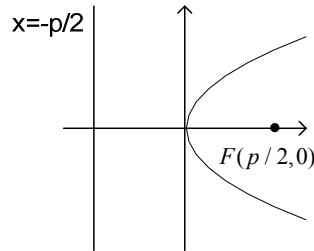
Prave  $y = \frac{b}{a}x$  i  $y = -\frac{b}{a}x$  su jednačine **asimptote hiperbole**.

**Jednačina tangente hiperbole**  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  **u njenoj tački**  $M(x_1, y_1)$  je  $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ .

## Parabola

**Parabola** je skup tačaka u ravni s osobinom da je rastojanje svake tačke od jedne stalne tačke jednako odstojanju te tačke od jedne stalne prave.

Stalna tačka  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  je **žiža parabole**, a stalna prava čija je jednačina  $x + \frac{p}{2} = 0$  je **direktrisa parabole**.



Odstojanje tačke  $F$  od direktrise obeležava se sa  $p$  i naziva se **parametar parabole**; koordinatni početak je **teme parabole**.

### Jednačina parabole

Jednačina  $y^2 = 2px$  predstavlja **konačni oblik jednačine parabole**, koja leži u desnoj poluravni, ima teme u koordinatnom početku, a osa joj se poklapa sa osom  $Ox$ .

Jednačina  $y^2 = -2px$  predstavlja **konačni oblik jednačine parabole**, koja leži u levoj poluravni, ima teme u koordinatnom početku, a osa joj se poklapa sa osom  $Ox$ .

**Prava**  $y = kx + n$  **dodiruje parabolu**  $y^2 = 2px$  ako je  $p^2 = 2knp$ .

**Jednačina tangente parabole**  $y^2 = 2px$  **u njenoj tački**  $M(x_1, y_1)$  je  $yy_1 = p(x + x_1)$ .

**51.** Na  $y$ -osi odrediti onu tačku koja je podjednako udaljena od tačaka  $A(2, -4)$  i  $B(6, -2)$ .

**Rešenje:**

Kako tačka pripada  $y$ -osi tražimo je u obliku  $C(0, y)$ .

$$d(A, C) = d(B, C)$$

Koristeći formulu za rastojanje između dve tačke  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  dobijamo:

$$\sqrt{(0-2)^2 + (y+4)^2} = \sqrt{(0-6)^2 + (y+2)^2} / 2$$

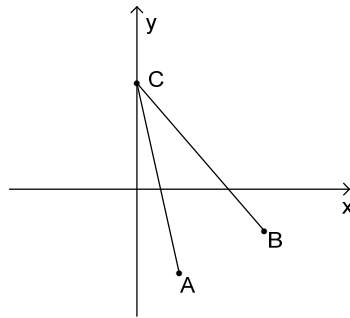
$$4 + (y+4)^2 = 36 + (y+2)^2$$

$$4 + \cancel{y^2} + 8y + 16 = 36 + \cancel{y^2} + 4y + 4$$

$$8y - 4y = 40 - 20$$

$$4y = 20$$

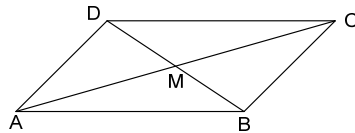
$$y = 5$$



52. Data su dva susedna temena paralelograma  $A(-3,5)$  i  $B(1,7)$ , kao i presečna tačka dijagonala  $M(1,1)$ . Odrediti koordinate druga dva temena.

**Rešenje:**

Treba odrediti temena  $C(x_1, y_1)$  i  $D(x_2, y_2)$ .



Kako se dijagonale paralelograma polove, to je tačka  $M$  središte duži  $AC$  i  $BD$ .

Iz relacije da je  $M$  središte duži  $AC$  dobijamo:

$$\frac{-3+x_1}{2}=1 \Rightarrow -3+x_1=2 \Rightarrow x_1=5$$

$$\frac{5+y_1}{2}=1 \Rightarrow 5+y_1=2 \Rightarrow y_1=-3$$

Iz relacije da je  $M$  središte duži  $BD$  dobijamo:

$$\frac{1+x_2}{2}=1 \Rightarrow 1+x_2=2 \Rightarrow x_2=1$$

$$\frac{7+y_2}{2}=1 \Rightarrow 7+y_2=2 \Rightarrow y_2=-5$$

Tražena temena su  $C(5, -3)$  i  $D(1, -5)$ .

**53.** Tačke  $A(-4, -2)$ ,  $B(2, 4)$  i  $C(-3, y)$  su temena trougla. Odrediti  $y$  tako da površina trougla bude 21.

**Rešenje :**

Polazimo od obrasca za površinu trougla:

$$P = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

$$21 = \frac{1}{2} |-4(4 - y) + 2(y + 2) - 3(-2 - 4)|$$

$$42 = |-16 + 4y + 2y + 4 + 18|$$

$$42 = |6y + 6|$$

$$42 = |6y + 6| = \begin{cases} 6y + 6, & y > -1 \\ -(6y + 6), & y < -1 \end{cases}$$

Prvo rešenje:

$$42 = 6y + 6 \Rightarrow 6y = 36 \Rightarrow y = 6$$

Drugo rešenje:

$$42 = -(6y + 6) \Rightarrow 6y = -48 \Rightarrow y = -8.$$

**54.** Temena trougla su  $A(2, -4)$ ,  $B(7, 6)$  i  $C(12, 1)$ . Tačka  $M$  deli stranu  $AB$  u razmeri 2:3, a tačka  $N$  stranu  $BC$  u razmeri 3:2; odrediti:

- a) površine trougova  $ABC, MNB$  i površinu trapeza  $ACMN$   
 b) razmeru površina trouglova  $ABC$  i  $MNB$

**Rešenje:**

a) S obzirom da tačka  $M(x_M, y_M)$  deli stranu  $AB$  u razmeri 2:3 to je  $\frac{2}{3} = \frac{AM}{MB}$ . Na osnovu ove razmere određujemo koordinate tačke  $M$ :

$$x_M = \frac{2 + \frac{2}{3} \cdot 7}{1 + \frac{2}{3}} = 4, \quad y_M = \frac{-4 + \frac{2}{3} \cdot 6}{1 + \frac{2}{3}} = 0$$

$$M(4, 0)$$

S obzirom da tačka  $N(x_N, y_N)$  deli stranu  $BC$  u razmeri 3:2 to je  $\frac{3}{2} = \frac{BN}{NC}$ . Na osnovu ove razmere određujemo koordinate tačke  $N$ :

$$x_N = \frac{7 + \frac{3}{2} \cdot 12}{1 + \frac{3}{2}} = 10, \quad y_N = \frac{6 + \frac{3}{2} \cdot 1}{1 + \frac{3}{2}} = 3$$

$$N(10, 3)$$

Površina trougla  $MNB$ :

$$P_{\triangle MNB} = \frac{1}{2} |4 \cdot (3 - 6) + 10 \cdot (6 - 0) + 7 \cdot (0 - 3)| = \frac{27}{2}$$

Površina trougla  $ABC$ :

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |2 \cdot (6 - 1) + 7 \cdot (1 + 4) + 12 \cdot (-4 - 6)| = \frac{75}{2}$$

Površina trapeza  $ACMN$ :

$$P_{\square ACMN} = P_{\triangle ABC} - P_{\triangle MNB} = \frac{75}{2} - \frac{27}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

$$b) \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle MNB}} = \frac{\frac{75}{2}}{\frac{27}{2}} = \frac{25}{9}$$

$$P_{\triangle ABC} : P_{\triangle MNB} = 25 : 9$$

55. U jednačini  $3y - 5x + 4p - 3 = 0$  odrediti parametar  $p$  tako da prava:

- a) prolazi kroz koordinatni početak
- b) da odseca na  $y$ -osi odsečak 3.

**Rešenje:**

Jednačinu  $3y - 5x + 4p - 3 = 0$  svodimo na eksplicitni oblik:

$$y = \frac{5}{3}x + \frac{-4p+3}{3}$$

- a) Kako prava prolazi kroz koordinatni početak, tačka  $O(0,0)$  zadovoljava jednačinu prave:

$$0 = 0 + \frac{-4p+3}{3} \Rightarrow -4p+3=0 \Rightarrow p = \frac{3}{4}$$

- b) Odsečak  $n$  na  $y$ -osi je 3, odnosno  $\frac{-4p+3}{3} = 3 \Rightarrow -4p+3=9 \Rightarrow p = -\frac{3}{2}$

56. Prava prolazi kroz tačku  $M(-5,4)$  i sa koordinatnim osama zaklapa trougao površine  $P = 5$ . Odrediti njenu jednačinu.

**Rešenje:**

Jednačinu prave tražimo u obliku  $y = kx + n$

$$P_{\triangle AOB} = 5 \Rightarrow 5 = \frac{x_1 y_1}{2}$$

$$x_1 = -\frac{n}{k}, y_1 = n \Rightarrow -\frac{n^2}{k} = 10 \Rightarrow k = -\frac{n^2}{10}$$

Kako tačka  $M(-5,4)$  pripada pravoj, ona zadovoljava njenu jednačinu:  $4 = -5k + n$ .

Rešavamo sistem:

$$\begin{cases} 4 = -5k + n \\ k = -\frac{n^2}{10} \end{cases} \Rightarrow n^2 + 2n - 8 = 0$$



Rešenja sistema su:

$$n_1 = -4, k_1 = -\frac{8}{5}$$

$$n_2 = 2, k_2 = -\frac{2}{5}$$

Dobijamo dve prave koje zadovoljavaju postavljene uslove:

$$y = -\frac{8}{5}x - 4 \text{ i } y = -\frac{2}{5}x + 2.$$

**57.** Odrediti ugao pod kojim se seku prave:

a)  $x + 2y - 9 = 0$  i  $x - 3y + 14 = 0$

b)  $x\sqrt{3} - y + 4 = 0$  i  $x\sqrt{3} + y - 4 = 0$

**Rešenje:**

a) Zapišimo prave u eksplicitnom obliku:  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$  i  $y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$

Koeficijenti pravca ovih pravih su  $k_1 = -\frac{1}{2}$  i  $k_2 = \frac{1}{3}$ . Koristeći obrazac  $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$

dobijamo  $tg\varphi = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$ . Ako uzmemo  $k_1 = \frac{1}{3}$  i  $k_2 = -\frac{1}{2}$  dobijamo

$$tg\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = 135^\circ$$

a)  $y = \sqrt{3}x + 4$   $y = -\sqrt{3}x + 4$ ,  $k_1 = \sqrt{3}$  i  $k_2 = -\sqrt{3}$

$$tg\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

U slučaju  $k_1 = -\sqrt{3}$  i  $k_2 = \sqrt{3}$  dobijamo  $tg\varphi = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 120^\circ$ .

**58.** Odrediti tačku  $R$  simetričnu s tačkom  $P(-5,13)$  u odnosu na pravu  $2x - 3y - 3 = 0$ .

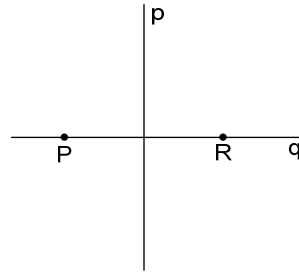
**Rešenje:**

Obeležimo datu pravu sa  $p: 2x - 3y - 3 = 0$  i zapišimo je u eksplicitnom obliku:  $y = \frac{2}{3}x - 1$ .

Neka tačke  $P$  i  $R$  pripadaju nekoj pravoj  $q$ , koja je zbog simetričnosti tačaka normalna na pravu  $p$ .

Koristeći obrazac za jednačinu prave kroz dve tačke dobijamo jednačinu prave  $q$ :

$$y - 13 = \frac{y_R - 13}{x_R + 5}(x + 5), \text{ gde su } x_R \text{ i } y_R \text{ koordinate tačke } R \text{ koje treba odrediti.}$$



S obzirom da su prave ortogonalne imamo da je  $k_p \cdot k_q = -1$ , gde su  $k_p$  i  $k_q$  koeficijenti pravaca pravih.

$$k_p = \frac{2}{3} \Rightarrow k_q = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{y_R - 13}{x_R + 5} = -\frac{3}{2} \Rightarrow y_R = \frac{11 - 3x_R}{2}$$

Kako su tačke  $P$  i  $R$  simetrične u odnosu na pravu  $p$  imamo da je  $d(P, p) = d(R, p)$

$$\frac{|2 \cdot (-5) - 3 \cdot 13 - 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|2x_R - 3y_R - 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$$

$$52 = 2x_R - 3y_R - 3$$

$$52 = 2x_R - 3 \frac{11 - 3x_R}{2} - 3 \cdot 2$$

$$104 = 4x_R - 33 + 9x_R - 6$$

$$143 = 13x_R$$

$$11 = x_R \Rightarrow y_R = \frac{11 - 3x_R}{2} = \frac{11 - 33}{2} = -11$$

Tačka simetrična tački  $P$  je  $R(11, -11)$ .

**59.** Naći jednačinu prave koja prolazi kroz presek  $y$ -ose i prave  $3x + 2y - 6 = 0$  i paralelna je pravoj  $x - 2y + 3 = 0$ .

**Rešenje:**

Treba odrediti presečnu tačku  $y$ -ose i prave  $3x + 2y - 6 = 0$ . Rešavamo sistem:

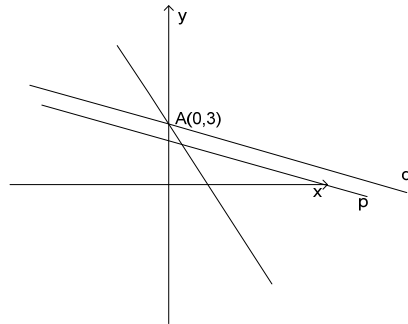
$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

Rešenje je tačka  $A(0,3)$ . Dakle treba odrediti jednačinu prave  $q$  koja sadrži tačku  $A$  i paralelna je pravoj  $x - 2y + 3 = 0$ . Paralelne prave imaju jednake koeficijente pravaca.

$$p: x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow k_p = \frac{1}{2} \Rightarrow k_q = \frac{1}{2}$$

Jednačinu prave  $q$  tražimo u obliku  $y = k_q x + n_q$ , odnosno  $y = \frac{1}{2}x + n_q$ . Tačka  $A(0,3)$  pripada traženoj pravoj:  $3 = 0 + n_q \Rightarrow n_q = 3$ .

Tražena prava ima jednačinu:  $y = \frac{1}{2}x + 3$ .



**60.** Iz tačke  $A(6,9)$  polazi svetlosni zrak pod uglom od  $45^\circ$  prema pozitivnom delu ose  $Ox$ , dolaskom do ose  $Ox$  zrak se odbije od nje. Odrediti jednačinu padajućeg i odbijenog zraka.

**Rešenje:**

Padajući zrak sadrži tačku  $A(6,9)$  i pada pod uglom od  $45^\circ \Rightarrow k = \operatorname{tg}45^\circ = 1$

$$y = kx + n \Rightarrow 9 = 6 + n \Rightarrow n = 3$$

Jednačina padajućeg zraka:  $y = x + 3$ .

Ugao pod kojim zrak pada jednak je uglu pod kojim se zrak odbija, što znači da je ugao koji odbijeni zrak zaklapa za pozitivnim delom ose  $Ox$   $135^\circ$ , odnosno  $k = \operatorname{tg}135^\circ = -1$ .

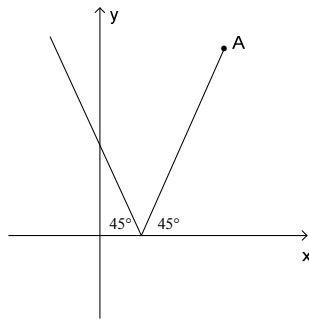
Padajući zrak seče osu  $Ox$  u tački koji dobijamo rešavanjem sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow x = -3$$

Rešenje je tačka  $B(-3, 0)$  koja pripada i odbijenom zraku:

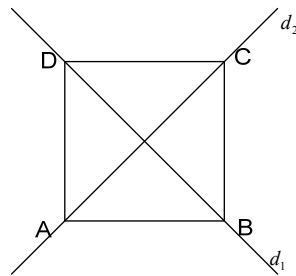
$$y = kx + n \Rightarrow 0 = 3 + n \Rightarrow n = -3$$

Jednačina odbijenog zraka:  $y = -x - 3$ .



**61.** Tačka  $A(-4, 5)$  je teme kvadrata čija dijagonala leži na pravoj  $7x - y + 8 = 0$ . Napisati jednačine stranica i druge dijagonale kvadrata.

**Rešenje:**



Zamenjujući koordinate tačke  $A$  u jednačinu  $7x - y + 8 = 0$  vidimo da joj ona ne pripada.

$$d_1: 7x - y + 8 = 0, A \in d_2$$

$$d_1 \perp d_2 \Rightarrow k_{d_1} k_{d_2} = -1, k_{d_1} = 7 \Rightarrow k_{d_2} = -\frac{1}{7}$$

$$d_2: y-5 = -\frac{1}{7}(x+4) \Rightarrow 7y+x-31=0.$$

Tražimo presečnu tačku  $S$  dijagonala kvadrata. Rešavamo sistem:

$$\begin{cases} 7x-y+8=0 \\ x+7y-31=0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, y = \frac{9}{2}$$

$$S\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right), x_S = -\frac{1}{2}, y_S = \frac{9}{2}$$

Određujemo koordinate temena  $C(x_C, y_C)$

$$x_S = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 2x_S - x_A \Rightarrow x_C = 3$$

$$y_S = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 2y_S - y_A \Rightarrow y_C = 4$$

$$d(A, S) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + 4\right)^2 + \left(\frac{9}{2} - 5\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$d(A, S) = d(B, S) = d(D, S) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$d(A, S) = d(B, S) = d(D, S) = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2}$$

Tačke  $B$  i  $D$  pripadaju dijagonali  $d_1: 7x - y + 8 = 0$ .

Rešavamo sistem:

$$\begin{cases} 7x - y + 8 = 0 \\ \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 7x + 8 \\ 50x^2 + 50x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, y_1 = 8 \\ x_2 = -1, y_2 = 1 \end{cases}$$

$B(-1, 1), D(0, 8)$

Jednačina stranice  $AB$ :

$$y - 1 = \frac{5 - 1}{-4 + 1}(x + 1) \Rightarrow 3y + 4x + 1 = 0$$

Jednačina stranice  $BC$ :

$$y - 4 = \frac{1 - 4}{-1 - 3}(x - 3) \Rightarrow 4y - 3x - 7 = 0$$

Jednačina stranice  $AD$  :

$$y - 8 = \frac{5-8}{-4}x \Rightarrow 4y - 3x - 32 = 0$$

Jednačina stranice  $DC$  :

$$y - 8 = \frac{4-8}{3}x \Rightarrow 3y + 4x - 24 = 0$$

**62.** Odrediti jednačinu kružnice koja prolazi kroz tačke  $A(3,1)$  i  $B(6,4)$ , a centar joj se nalazi na  $y$ -osi.

**Rešenje:**

$S(p, q)$ -centar kružnice

Pošto se centar kružnice nalazi na  $y$ -osi  $\Rightarrow p = 0$

Tačke  $A(3,1)$  i  $B(6,4)$  zadovoljavaju jednačinu kružnice:  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$

$$(3 - 0)^2 + (1 - q)^2 = r^2$$

$$(6 - 0)^2 + (4 - q)^2 = r^2$$

$$(3 - 0)^2 + (1 - q)^2 = (6 - 0)^2 + (4 - q)^2$$

$$6q = 42 \Rightarrow q = 7$$

$$r^2 = 9 + (1 - 7)^2 = 45$$

Jednačina kružnice je  $x^2 + (y - 7)^2 = 45$

**63.** Kroz tačku  $A(-1, y)$  kružnice  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$  povučena je tetiva koja je paralelna sa pravom  $x - 3y + 7 = 0$ . Odrediti jednačinu tetive i njenu drugu presečnu tačku.

**Rešenje:**

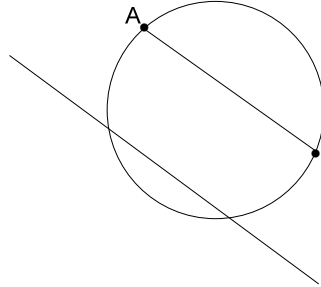
Prvo treba odrediti drugu koordinatu tačke  $A$  :

$$1 + y^2 + 2 + 6y + 5 = 0$$

$$y^2 + 6y + 8 = 0 \Rightarrow y_1 = -2, y_2 = -4$$

Dakle postoje dve tačke:  $A_1(-1, -2)$  i  $A_2(-1, -4)$ .

Tetiva je paralelna sa pravom  $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ , pa su im koeficijenti pravaca jednaki,  $k_t = \frac{1}{3}$ ,  $k_t$ -koeficijent pravca tetive.



Jednačina tetive koja prolazi kroz tačku  $A_1(-1, -2)$  je  $y + 2 = \frac{1}{3}(x + 1)$  odnosno  $x - 3y - 5 = 0$ . Tražimo drugu presečnu tačku sa kružnicom. Rešavamo sistem:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \\ x = 3y + 5 \end{cases} \Rightarrow (3y + 5)^2 + y^2 - 6y - 10 + 6y + 5 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 3y + 2 = 0 \Rightarrow y_1 = -2, y_2 = -1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$$

Druga presečna tačka je  $B_1(2, -1)$ .

Jednačina tetive koja prolazi kroz tačku  $A_2(-1, -4)$  je  $y + 4 = \frac{1}{3}(x + 1)$  odnosno  $x - 3y - 11 = 0$ . Tražimo drugu presečnu tačku sa kružnicom. Rešavamo sistem:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0 \\ x = 3y + 11 \end{cases} \Rightarrow (3y + 11)^2 + y^2 - 6y - 22 + 6y + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 5y^2 + 33y + 52 = 0 \Rightarrow y_1 = -4, y_2 = -\frac{13}{5} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{16}{5}$$

Druga presečna tačka je  $B_2(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5})$ .

**64.** Odrediti položaj prave i kružnice:

a)  $x + y - 9 = 0$  i  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

b)  $x + y + 4 = 0$  i  $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$

c)  $4x + 3y - 36 = 0$  i  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

**Rešenje:**

*Napomena:*

Neka je data prava  $t: Ax + By + C = 0$  i kružnica  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ , gde je  $S(p, q)$  -centar kružnice,  $r$  -poluprečnik kružnice.

Ako je  $d(S, t) < r$  prava seče kružnicu.

Ako je  $d(S, t) = r$  prava dodiruje kružnicu.

Ako je  $d(S, t) > r$  prava i kružnica nemaju zajedničkih tačaka.

a)  $t: x + y - 9 = 0$ ,  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

$S(2, 1)$ ,  $r = 5$

$$d(S, t) = \frac{|2 + 1 - 9|}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} < 5 \Rightarrow \text{prava seče kružnicu}$$

b)  $t: x + y + 4 = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ ,  $p = -\frac{d}{2} = 0$ ,  $q = -\frac{e}{2} = 1$ ,

$r = \sqrt{p^2 + q^2 - f} = 2$ ,  $S(0, 1)$ ,  $r = 2$

$$d(S, t) = \frac{|0 + 1 + 4|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} > 2 \Rightarrow \text{prava i kružnica nemaju zajedničkih tačaka}$$

c)  $t: 4x + 3y - 36 = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ ,  $p = 2$ ,  $q = 1$ ,  $r = 5$

$$d(S, t) = \frac{|8 + 3 - 36|}{5} = \frac{25}{5} = 5 = r \Rightarrow \text{prava dodiruje kružnicu.}$$

**65.** Iz tačke  $A(-5, 7)$  van kružnice povučene su tangente na kružnicu  $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$ .

Odrediti:

a) površinu trougla čija su temena data tačka i dodirne tačke pomenutih tangenata;

b) jednačinu kružnice opisane oko tako dobijenog trougla

c) ugao pod kojim ova kružnica seče datu kružnicu

d) jednačinu zajedničke sečice ovih kružnica.

**Rešenje:**

a) Treba odrediti jednačine povučenih tangenata  $y = kx + n$



$$x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0, \quad p = -\frac{d}{2} = -4, \quad q = -\frac{e}{2} = 0, \quad r = \sqrt{p^2 + q^2 - f} = 5$$

Tačka  $A$  pripada traženoj tangenti :  $7 = -5k + n$

$$\text{Uslov dodira prave i kružnice: } r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2 \Rightarrow 25(k^2 + 1) = (-4k + n)^2 \Rightarrow$$

$$25(k^2 + 1) = (-4k + 7 + 5k)^2 \Rightarrow 12k^2 - 7k - 12 = 0 \Rightarrow k_1 = -\frac{3}{4}, k_2 = \frac{4}{3}$$

$$n_1 = 7 + 5k_1 = \frac{13}{4}, \quad n_2 = 7 + 5k_2 = \frac{41}{3}$$

Jednačine tangenata iz tačke  $A$  su:

$$t_1 : y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$$

$$t_2 : y = \frac{4}{3}x + \frac{41}{3}$$

Treba odrediti u kojim tačkama ove tangente dodiruju kružnicu.

Rešavamo sisteme:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0 \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}\right)^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$y = 4$$

Tačka  $B(-1, 4)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0 \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{41}{3} \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{4}{3}x + \frac{41}{3}\right)^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow (x+8)^2 = 0 \Rightarrow x = -8$$

$$y = 3$$

Tačka  $C(-8, 3)$

Treba odrediti površinu trougla čija su temena:  $A(-5, 7), B(-1, 4), C(-8, 3)$

$$P = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| = \frac{1}{2} |-5(4 - 3) - 1(3 - 7) - 8(7 - 4)| = 12,5$$

b) Tačke  $A(-5, 7), B(-1, 4), C(-8, 3)$  pripadaju traženoj kružnici:

$$(-5 - p)^2 + (7 - q)^2 = r^2$$

$$(-1 - p)^2 + (4 - q)^2 = r^2$$

$$(-8 - p)^2 + (3 - q)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (-5-p)^2 + (7-q)^2 = (-1-p)^2 + (4-q)^2$$

$$\Rightarrow 8p - 6q = -57$$

$$\Rightarrow (-8-p)^2 + (3-q)^2 = (-1-p)^2 + (4-q)^2$$

$$\Rightarrow -14p - 2q = 56$$

Rešavamo sistem:

$$8p - 6q = -57$$

$$-14p - 2q = 56, \quad p = -\frac{9}{2}, q = \frac{7}{2}, r^2 = \frac{50}{4}$$

Tražena kružnica:

$$(x + \frac{9}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{50}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 + 9x - 7y + 20 = 0$$

- c) Da bismo odredili ugao pod kojim se seku kružnice, treba konstruisati tangente na kružnice u presečnim tačkama ovih kružnica. Ugao između tangenata daće nam ugao pod kojim se seku kružnice.

Kružnice se seku u tačkama  $B(-1, 4), C(-8, 3)$ .

Kroz tačku  $B(-1, 4)$  postaviceo tangente na kružnice:

Tangentu na kružnicu  $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$  smo već odredili:  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$

Treba odrediti jednačinu tangente na kružnicu  $x^2 + y^2 + 9x - 7y + 20 = 0$

$$x^2 + y^2 + 9x - 7y + 20 = 0 \Rightarrow (x + \frac{9}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = \frac{50}{4}$$

Tačka  $B$  pripada kružnici, pa koristeći obrazac  $(x-p)(x_1-p) + (y-q)(y_1-b) = r^2$

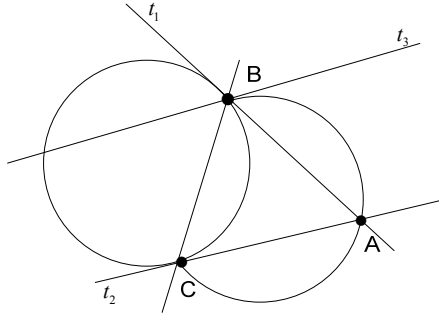
dobijamo jednačinu tangente :  $(x + \frac{9}{2})(-1 + \frac{9}{2}) + (y - \frac{7}{2})(4 - \frac{7}{2}) = \frac{50}{4}$ , tj.

$$t_3 : y = -7x - 3, \quad k_{t_3} = -7$$

$$tg\varphi = \frac{-\frac{3}{4} + 7}{1 + \frac{3}{4} \cdot 7} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

- d) Zajednička sečica je prava koja prolazi kroz tačke  $B(-1, 4)$  i  $C(-8, 3)$ :

$$y - 3 = \frac{4 - 3}{-1 + 8}(x + 8) \Rightarrow 7y - x - 29 = 0.$$



66. Pod kojim uglom se iz tačke  $P(-6,3)$  vidi kružnica  $x^2 + y^2 - 6y = 0$ ?

**Rešenje:**

Kroz tačku  $P(-6,3)$  postavimo tangente  $t_{1,2} : y = kx + n$  na kružnicu  $x^2 + y^2 - 6y = 0$ .

$$x^2 + y^2 - 6y = 0 \Rightarrow x^2 + (y-3)^2 = 9$$

$$p = 0, q = 3, r = 3$$

Tačka  $P$  pripada tangenti  $3 = -6k + n$

$$\text{Uslov dodira: } r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2 \Rightarrow 9(k^2 + 1) = (-3 + 3 + 6k)^2 \Rightarrow$$

$$27k^2 = 9$$

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, k_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

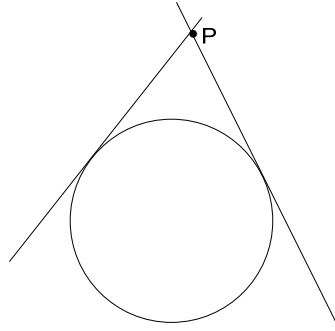
$$n_1 = 3 + \frac{6}{\sqrt{3}}, n_2 = 3 - \frac{6}{\sqrt{3}}$$

Jednačine tangenata:

$$t_1 : y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3 + \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$t_2 : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 3 - \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$\text{tg } \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}} \right| = \sqrt{3} \text{ tg } \varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$



Dakle, kružnica se vidi pod uglom od  $60^\circ$ .

67. Napisati jednačinu elipse, ako se dva njena temena nalaze u tačkama  $A_1(8,0)$  i  $A_2(-8,0)$ , a žiže imaju koordinate  $(\pm 5,0)$ .

**Rešenje:**

Na osnovu temena  $A_1(8,0)$  i  $A_2(-8,0)$  zaključujemo da je  $a = 8$ .

Žiže su  $F_1(5,0)$  i  $F_2(-5,0) \Rightarrow e = 5$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} / a$$

$$e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - e^2 \Rightarrow b^2 = 64 - 25 = 39$$

Jednačina elipse:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$$

68. Odrediti zajedničke tačke elipse  $x^2 + 4y^2 = 4$  i kružnice, koja prolazi kroz žiže elipse, a centar joj je u temenu na pozitivnom delu ordinatne ose.

**Rešenje:**

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow a^2 = 4, b^2 = 1$$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

Žiže su  $F_1(\sqrt{3}, 0)$  i  $F_2(-\sqrt{3}, 0)$

Temena na ordinatnoj osi su  $B_1(0, b) = B_1(0, 1)$  i  $B_2(0, -b) = B_2(0, -1)$

Dakle centar kružnice je tačka  $B_1(0, 1)$  a poluprečnik je  $r = d(B_1, F_1)$

$$r = d(B_1, F_1) = \sqrt{3+1} = 2$$

Jednačina kružnice je:  $x^2 + (y-1)^2 = 4$

Da bismo odredili presečne tačke elipse i kružnice, rešićemo sistem:

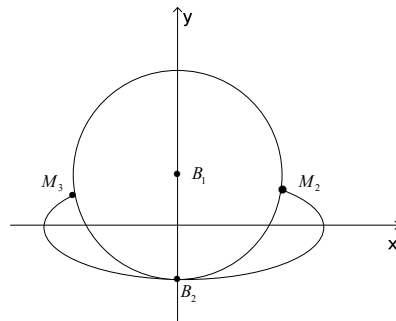
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ x^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 - 4y^2 \\ x^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow -3y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y_1 = -1, y_2 = \frac{1}{3}$$

$$y_1 = -1, x_1 = 0$$

$$y_2 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$y_3 = \frac{1}{3}, x_3 = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Presečne tačke su:  $B_2(0, -1)$ ,  $M_2(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$ ,  $M_3(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$ .



**69.** Na pravoj  $x = -5$  odrediti tačku podjednako udaljenu od leve žiže i temena koje pripada pozitivnom delu ordinatne ose elipse  $x^2 + 5y^2 = 20$ .

**Rešenje:**

$$x^2 + 5y^2 = 20$$

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 20, b^2 = 4$$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{20 - 4} = 4$$

Žiže su  $F_1(4, 0)$  i  $F_2(-4, 0)$

Temena na ordinatnoj osi su  $B_1(0, 2)$  i  $B_2(0, -2)$

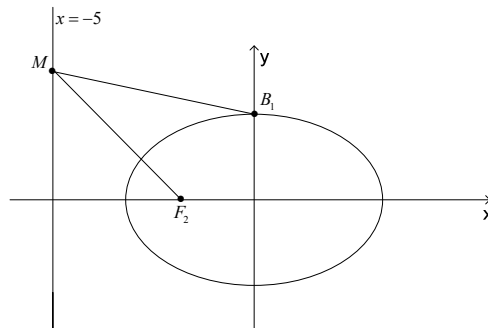
Tražimo tačku  $M(-5, y)$  tako da je  $d(M, F_2) = d(M, B_1)$

$$d(M, F_2) = d(M, B_1) \Rightarrow \sqrt{(-4 + 5)^2 + y^2} = \sqrt{(-5)^2 + (y - 2)^2} / 2$$

$$1 + y^2 = 25 + y^2 - 4y + 4$$

$$4y = 28 \Rightarrow y = 7$$

Tražena tačka je  $M(-5, 7)$ .



70. Tačka  $M(x_1, y_1)$  na elipsi  $2x^2 + 3y^2 = 35$  udaljena je od centra elipse za  $d = \sqrt{17}$ . Napisati jednačinu tangente elipse u toj tački.

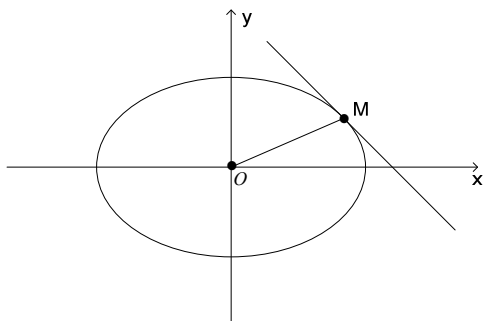
**Rešenje:**

$$d = \sqrt{17} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Rešavamo sistem:

$$\begin{cases} 2x_1^2 + 3y_1^2 = 35 \\ x_1^2 + y_1^2 = 17 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \pm 4, y_1 = \pm 1$$

Imamo četiri tačke:  $M_1(4, 1)$ ,  $M_2(4, -1)$ ,  $M_3(-4, 1)$ ,  $M_4(-4, -1)$ .



Konstruišimo tangentu  $t_1 : y = kx + n$  u tački  $M_1(4,1)$ :

Uslov dodira tangente i elipse:  $a^2k^2 + b^2 = n^2$

$$2x^2 + 3y^2 = 35$$

$$\frac{x^2}{\frac{35}{2}} + \frac{y^2}{\frac{35}{3}} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{35}{2}, b^2 = \frac{35}{3}$$

$$a^2k^2 + b^2 = n^2 \Rightarrow \frac{35}{2}k^2 + \frac{35}{3} = n^2 \Rightarrow 105k^2 + 70 = 6n^2$$

Tačka  $M_1(4,1)$  pripada tangenti  $t_1 : 1 = 4k + n$

Rešavamo sistem:

$$\begin{cases} 105k^2 + 70 = 6n^2 \\ 1 = 4k + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 105k^2 + 70 = 6(1-4k)^2 \\ 1 = 4k + n \end{cases} \Rightarrow 9k^2 + 48k + 64 = 0$$

$$k = -\frac{8}{3}, n = \frac{35}{3}$$

Tangenta u tački  $M_1(4,1)$  je  $t_1 : y = -\frac{8}{3}x + \frac{35}{3} \Rightarrow 8x + 3y - 35 = 0$ .

Ponavljajući postupak dobijamo preostale tri tangente:

U tački  $M_2(4,-1)$  je  $t_2 : 8x - 3y - 35 = 0$

U tački  $M_3(-4,1)$  je  $t_3 : 8x - 3y + 35 = 0$

U tački  $M_4(-4,-1)$  je  $t_4 : 8x + 3y + 35 = 0$ .

71. Napisati jednačinu hiperbole ako je razmera njenih poluosa 3 : 4 i  $e = 15$ .

**Rešenje:**

$$a : b = 3 : 4 \Rightarrow 4a = 3b \Rightarrow a = \frac{3b}{4}$$

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 15 = \sqrt{a^2 + b^2} / 2$$

$$225 = a^2 + b^2 \Rightarrow 225 = \frac{9b^2}{16} + b^2 \Rightarrow 225 = \frac{25b^2}{16}$$

$$b^2 = 144 \Rightarrow b = 12$$

$$a = 9$$

Jednačina hiperbole je:  $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$ .

72. Iz žiže hiperbole  $9x^2 - 16y^2 = 144$  spuštena je normala na asimptotu. Izračunati površinu ograničenu ovom normalom, asimptotom i apscisnom osom.

**Rešenje:**

Površina ograničena normalom, asimptotom i apscisnom osom jeste pravougli trougao čija su temena žiža hiperbole, centar hiperbole i tačka koju dobijamo u preseku normale i asimptote. Zbog simetričnosti žiža i asimptota nije bitno koju ćemo žižu izabrati i na koju asimptotu ćemo spustiti normalu, rezultat će biti isti.

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16, b^2 = 9$$

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow e = 5$$

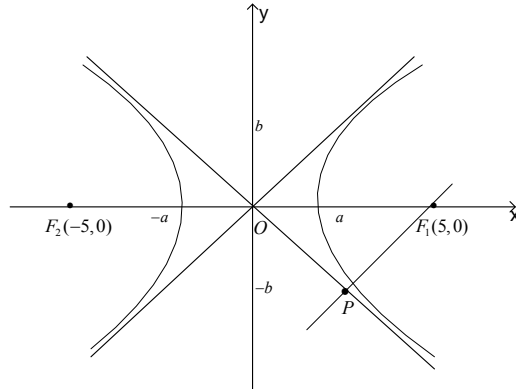
Žiže su  $F_1(5, 0)$  i  $F_2(-5, 0)$ .

Asimptote su:

$$a_1: y = \frac{b}{a}x = \frac{3}{4}x$$

$$a_2: y = -\frac{b}{a}x = -\frac{3}{4}x$$





Iz žiže  $F_1(5,0)$  spuštamo normalu na asimptotu  $a_2 : y = -\frac{3}{4}x$

$k_n \cdot k_{a_2} = -1$ ,  $k_n, k_{a_2}$  -koeficijenti pravaca normale i asimptote.

$$k_{a_2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow k_n = \frac{4}{3}$$

$$\text{Jednačina normale: } y - 0 = \frac{4}{3}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$$

Tražimo presečnu tačku  $P$  asimptote i normale; rešavamo sistem:

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x \\ -\frac{3}{4}x = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x \\ x = \frac{16}{5} \end{cases}$$

$$P\left(\frac{16}{5}, -\frac{12}{5}\right).$$

Tražimo površinu trougla  $F_1OP$ :

$$P = \frac{1}{2} \left| 0\left(0 + \frac{12}{5}\right) + 5\left(-\frac{12}{5} - 0\right) + \frac{16}{5}(0 - 0) \right| = 6.$$

**73.** Kroz tačku  $A(3,-1)$  povući tetivu hiperbole  $x^2 - 4y^2 = 4$ , koja je tom tačkom prepolovljena.

**Rešenje:**

Neka tražena tetiva seče hiperbolu u tačkama  $M_1(x_1, y_1)$  i  $M_2(x_2, y_2)$ . Tada je

$x_1^2 - 4y_1^2 = 4$  i  $x_2^2 - 4y_2^2 = 4$ . Oduzimanjem ovih jednačina dobijamo sledeće:

$$x_2^2 - x_1^2 - 4(y_2^2 - y_1^2) = 0 \Rightarrow (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 4(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 0$$

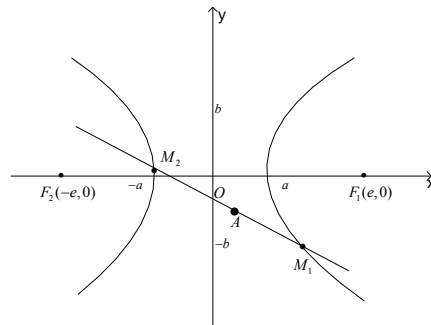
$$\frac{(x_2 + x_1)}{4(y_2 + y_1)} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Kako je tačka  $A(3, -1)$  središte duži  $M_1M_2$  imamo  $x_1 + x_2 = 6, y_1 + y_2 = -2$ , pa prethodna jednačina postaje:

$$\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{6}{4 \cdot (-2)} = -\frac{3}{4}$$

Prema tome, koeficijent pravca tražene prave je  $k = -\frac{3}{4}$ .

Jednačina tetive kroz tačku  $A(3, -1)$  je  $y + 1 = -\frac{3}{4}(x - 3)$  tj.  $3x + 4y - 5 = 0$ .



74. Direktrisa parabole sa temenom u koordinatnom početku je prava  $2x + 5 = 0$ . Napisati jednačinu parabole i odrediti koordinate njene žiže.

**Rešenje:**

$$y^2 = 2px$$

Direktrisa  $x = -\frac{p}{2}$

$$2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \Rightarrow p = 5$$

Jednačina parabole  $y^2 = 10x$ , žiža  $F(\frac{p}{2}, 0) = F(\frac{5}{2}, 0)$ .

**75.** Odrediti geometrijsko mesto sredine tetiva parabole  $y^2 = 4x$ , koje zaklapaju sa osom  $O_x$  ugao od  $45^\circ$ .

**Rešenje:**

Neka tetiva seče parabolu u tačkama  $M_1(x_1, y_1)$  i  $M_2(x_2, y_2)$ . Tada je  $y_1^2 = 4x_1$  i  $y_2^2 = 4x_2$ . Oduzimanjem ovih jednačina dobijamo :

$$y_2^2 - y_1^2 = 4(x_2 - x_1) \Rightarrow (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 4(x_2 - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4}{y_2 + y_1}$$

Koeficijent pravca tetive je  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , a pošto tetiva zaklapa sa osom  $O_x$  ugao od  $45^\circ$ , to je

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

Neka je tačka  $M(x, y)$  središte duži  $M_1M_2$ .

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x_1 + x_2 = 2x, y_1 + y_2 = 2y$$

Na osnovu ovih jednakosti jednačina  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4}{y_2 + y_1}$  postaje:

$$1 = \frac{4}{2y}, \text{ tj. } 2y = 4 \Rightarrow y = 2 \text{ je traženo geometrijsko mesto sredine tetiva parabole.}$$

**76.** Prava  $2x + y - 12 = 0$  seče parabolu  $y^2 = 4x$ . Odrediti:

a) ugao između tangenata u tim tačkama

b) jednačinu tangente parabole, koja je paralelna sa datom pravom

- c) jednačinu kružnice opisane oko trougla čija su temena presečne tačke date prave i parabole i presek tangenata povučenih na parabolu u tim tačkama  
d) ugao pod kojim se seku data parabola i pomenuta kružnica.

**Rešenje:**

a) Tražimo presečne tačke prave i parabole; rešavamo sistem:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ 2x + y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ y = -2x + 12 \end{cases} \Rightarrow (-2x + 12)^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$x_1 = 9, y_1 = -6$$

$$x_2 = 4, y_2 = 4$$

Dakle prava i parabola se seku u tačkama  $M_1(9, -6)$  i  $M_2(4, 4)$

Konstruišimo tangentu  $t_1 : y = kx + n$  u tački  $M_1(9, -6)$ :

Uslov dodira tangente i parabole:  $p = 2kn$

$$y^2 = 4x \Rightarrow p = 2$$

$$2 = 2kn \Rightarrow 1 = kn \Rightarrow n = \frac{1}{k}$$

Tačka  $M_1(9, -6)$  pripada tangenti  $-6 = 9k + n$

Rešavamo sistem:

$$\begin{cases} -6 = 9k + n \\ n = \frac{1}{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 = 9k + \frac{1}{k} \\ n = \frac{1}{k} \end{cases} \Rightarrow 9k^2 + 6k + 1 = 0$$

$$k = -\frac{1}{3}, n = -3$$

Tangenta u tački  $M_1(9, -6)$  je  $t_1 : y = -\frac{1}{3}x - 3 \Rightarrow x + 3y + 9 = 0$ .

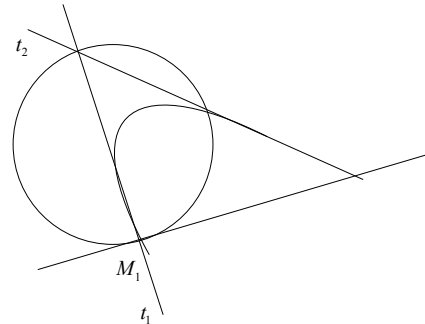
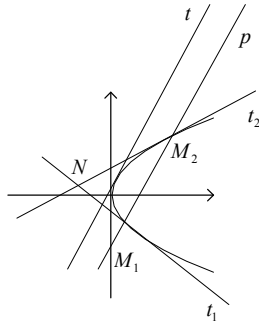
Ponavljajući postupak dobijamo da je tangenta u tački  $M_2(4, 4)$ :

$$t_2 : y = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow x - 2y + 4 = 0$$

$$k_{t_1} = -\frac{1}{3}, k_{t_2} = \frac{1}{2}, k_{t_1}, k_{t_2} \text{ -koeficijenti pravaca tangenata}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_{t_2} - k_{t_1}}{1 + k_{t_1} k_{t_2}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

Ugao između tangenata je  $45^\circ$ .



b) Obeležimo datu pravu sa  $p$  i traženu tangentu sa  $t$ .

$$2x + y - 12 = 0 \Rightarrow y = -2x + 12$$

$$p \parallel t \Rightarrow k_p = k_t = -2$$

Iz uslova dodira  $1 = kn$  dobijamo  $n = -\frac{1}{2}$ .

$$\text{Jednačina tangente je : } y = -2x - \frac{1}{2} \Rightarrow 4x + 2y + 1 = 0$$

c) Tražimo presečnu tačku tangenata, rešavamo sistem:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x - 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 = -\frac{1}{3}x - 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{6}x = -5 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow x = -6, y = -1$$

Treba odrediti jednačinu kružnice  $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$  kojoj pripadaju tačke  $M_1(9, -6)$ ,  $M_2(4, 4)$  i  $N(-6, -1)$ :

$$(9-p)^2 + (-6-q)^2 = r^2$$

$$(4-p)^2 + (4-q)^2 = r^2$$

$$(-6-p)^2 + (-1-q)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (9-p)^2 + (-6-q)^2 = (4-p)^2 + (4-q)^2$$

$$\Rightarrow -2p + 4q = -17$$

$$\Rightarrow (9-p)^2 + (-6-q)^2 = (-6-p)^2 + (-1-q)^2$$

$$\Rightarrow -3p + q = -8$$

Rešavamo sistem:  $\begin{cases} -2p + 4q = -17 \\ -3p + q = -8 \end{cases}$ ,  $p = \frac{3}{2}$ ,  $q = -\frac{7}{2}$ ,  $r^2 = \frac{250}{4}$

Tražena kružnica:

$$(x - \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{7}{2})^2 = \frac{250}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 - 3x + 7y - 48 = 0$$

d) Parabola i kružnica se seku u tačkama  $M_1(9, -6)$  i  $M_2(4, 4)$ .

U tački  $M_1(9, -6)$  postavimo tangentu na kružnicu.

Uslov dodira tangente i kružnice  $r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2$

Rešavamo sistem:

$$\begin{cases} -6 = 9k + n \\ \frac{250}{4}(k^2 + 1) = (\frac{3}{2}k + \frac{7}{2} + n)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 - 9k = n \\ \frac{250}{4}(k^2 + 1) = (\frac{3}{2}k + \frac{7}{2} - 6 - 9k)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 - 9k = n \\ \frac{250}{4}(k^2 + 1) = (-\frac{15}{2}k - \frac{5}{2})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 - 9k = n \\ k^2 - 6k + 9 = 0 \end{cases}$$

$$k = 3, n = -33$$

Jednačina tangente je:  $y = 3x - 33$

$$k_{t_1} = -\frac{1}{3}$$

$k_{t_1} \cdot k = -1 \Rightarrow$  ugao između tangenata je  $90^\circ$ .

Dakle, kružnica i parabola se seku pod pravim uglom.

## X VEKTORSKA ALGEBRA

Veličine koje su u potpunosti određene jednim brojem zovu se *skalari* (na primer: dužina, zapremina, temperatura).

*Vektor* je veličina određena pomoću tri karakteristike: pravca, smera, intenziteta (na primer: brzina, ubrzanje, sila).

### Pojam vektora

Neka su u prostoru date dve tačke  $A$  i  $B$  koje određuju duž. Neka je  $A$  početna tačka duži, a  $B$  krajnja. Ovim je uvedena orijentacija duži  $AB$ .

Uredjeni par  $(A, B)$  zove se orijentisana duž ili *vezani vektor* i označava se  $\overrightarrow{AB}$ .

Rastojanje tačke  $A$  od tačke  $B$  zove se *intenzitet* vektora i označava se  $|\overrightarrow{AB}|$ .

Prava na kojoj leži vektor  $\overrightarrow{AB}$  zove se nosač ili *pravac* vektora.

Ako se početna i krajnja tačka vektora poklapaju, radi se o *nula-vektoru*  $\vec{0}$ . Njegov pravac i smer nisu određeni

U skupu orijentisanih duži može se uvesti relacija ekvivalencije:

Dve orijentisane duži  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{CD}$  su ekvivalentne ako su obe nula-vektori ili ako su iste dužine, pravca i smera.

*Klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju ekvivalencije u skupu orijentisanih duži zove se slobodni vektor ili kraće vektor.*

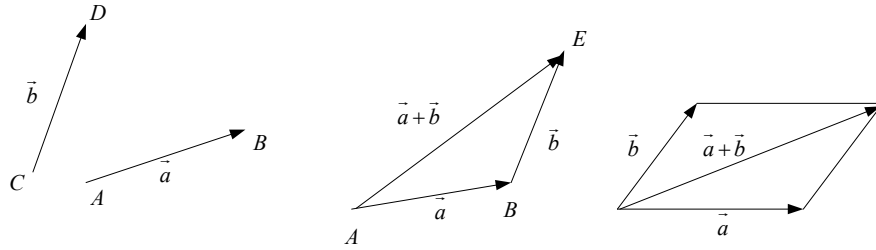
Moduo (intenzitet) vektora je dužina njegovog proizvoljnog predstavnika.

Skup svih vektora označava se sa  $V$ .

### Operacije sa vektorima

*Sabiranje vektora:*

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$ , gde je tačka  $E$  određena tako da je  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$ . Sabiranje vektora vrši se takođe po pravilu paralelograma.



Skup svih vektora sa operacijom sabiranja  $(V, +)$  je komutativna grupa:

- Neutralan element operacije  $+$  je nula-vektor  $\vec{0}$ .

- Kako je  $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$ , sledi da za svaki vektor  $\vec{AB}$ , postoji vektor  $\vec{BA} = -\vec{AB}$ , koji je njegov inverzni element tj. **suprotni vektor**.

**Oduzimanje** tj. **razlika** dva vektora definiše se sa:

$$\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AB} + (-\vec{CD}) = \vec{AE},$$

gde je tačka  $E$  određena tako da bude  $\vec{BE} = -\vec{CD}$ .

*Napomena:* Vektore osim velikim slovima (koja označavaju početnu i krajnju tačku vektora), često obeležavamo i malim slovima, na primer:  $a, b, c, \dots$

**Osobine operacije sabiranja vektora:**

- 1) Zbir dva vektora je vektor:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ;
  - 2)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
  - 3)  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
  - 4)  $(\forall \vec{a} \in V)(\exists -\vec{a}) \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
  - 5)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\Rightarrow (V, +)$  je komutativna grupa

**Množenje vektora skalarom**

Neka je  $\alpha \in R, \vec{a} \in V$ . Tada je  $\alpha\vec{a}$  vektor čiji je intenzitet jednak  $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$ , pravac

je jednak pravcu vektora  $\vec{a}$ , a smer je jednak smeru vektora  $\vec{a}$ , ako je  $\alpha > 0$ , ili je suprotnog smera ako je  $\alpha < 0$ :

$$\vec{a}, \frac{1}{2}\vec{a}, 2\vec{a}, -\frac{3}{2}\vec{a}$$



### Osobine operacije množenja vektora skalarom:

- 1)  $(\forall \vec{a}) 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ;
- 2)  $(\forall \alpha, \beta \in R, \forall \vec{a} \in V) \alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}$
- 3)  $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$
- 4)  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$ .

### Definicija vektorskog prostora

Skup vektora sa operacijama sabiranja i množenja vektora brojem  $(V, +, \cdot, R)$  predstavlja **vektorski prostor nad poljem realnih brojeva**.

Dva vektora, koji nisu nula-vektori, zovu se **kolinearni** ako imaju isti pravac. Kolinearni vektori zovu se i **paralelni**.

Ako je  $\vec{a} \neq 0$  i vektor  $\vec{b}$  kolinearan sa  $\vec{a}$ , tada postoji realan broj  $\lambda$  takav da je  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ .

### Linearna zavisnost

Neka su  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in V$  i  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$ . Vektor  $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n$  zove se linearna kombinacija vektora  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in V$ . Brojevi  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$  su koeficijenti linearne kombinacije.

Vektori  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$  zovu se **linearno zavisni** ako postoje realni brojevi  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , koji nisu svi jednaki nuli, takvi da je:

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{0}.$$

U protivnom, ako iz uslova  $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{0}$  sledi  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

kaže se da su vektori **linearno nezavisni**.

Dva vektora su linearno zavisna ako i samo ako su kolinearni.

Vektori se zovu **komplanarni** ako pripadaju istoj ili paralelnim ravnima.

Tri vektora  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  su linearno zavisna ako i samo ako su komplanarni.

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \chi \vec{c} = \vec{0} \wedge \chi \neq 0 \Rightarrow \vec{c} = -\frac{\alpha}{\chi} \vec{a} - \frac{\beta}{\chi} \vec{b}.$$

Svaka četiri vektora u prostoru su linearno zavisna.

Ako su  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  tri proizvoljna nekomplanarna vektora, tada za proizvoljan vektor  $\vec{d}$  postoje brojevi  $\lambda, \mu, \nu$  tako da je:

$$\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}.$$

Maksimalan broj linearno nezavisnih vektora u nekom skupu vektora  $V$  zove se **baza** skupa  $V$ .

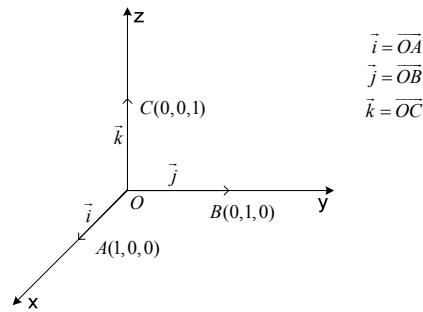
Svaka dva nekomplanarna vektora u ravni čine bazu u toj ravni.

Svaka tri nekomplanarna vektora u prostoru predstavljaju bazu u prostoru.

## Vektori u Dekartovom koordinatnom sistemu

Neka je dat Dekartov koordinatni sistem sa osama  $x, y, z$  i koordinatnim početkom  $O$ . Uočimo tačke  $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$ .

Vektori  $\vec{i} = \overrightarrow{OA}, \vec{j} = \overrightarrow{OB}, \vec{k} = \overrightarrow{OC}$  zovu se **koordinatni vektori** ili **ortovi**. Ovi vektori su linearno nezavisni pa čine bazu u prostoru  $R^3$ .



Svakoj tački  $M(a_x, a_y, a_z)$  u prostoru može se pridružiti vektor  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ , koji se zove **vektor položaja** tačke  $M$ . Ovaj vektor može se na jedinstven način razložiti po bazi  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ :

$$\vec{r} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Na ovaj način uspostavlja se obostrano jednoznačna veza između vektora  $\vec{r}$  i uredene trojke realnih brojeva  $a_x, a_y, a_z \in R^3$ . Pišemo  $\vec{r} = (a_x, a_y, a_z)$ , gde su  $a_x, a_y, a_z$  koordinate vektora  $\vec{r}$  po bazi  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ili Dekartove koordinate vektora  $\vec{r}$ .

Intenzitet vektora izračunava se relacijom:

$$|\vec{r}| = |\overrightarrow{OM}| \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

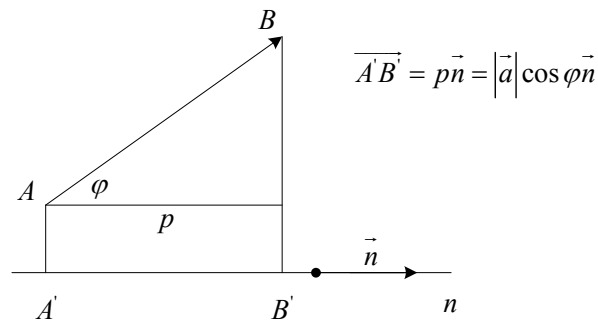
## Sabiranje dva vektora

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \text{ i } \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}:$$

$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}$$

## Projekcija vektora na osu

Dat je vektor  $\vec{a} = \overline{AB}$  i prava  $n$  orijentisana jediničnim vektorom  $\vec{n}$ .



Veličina  $p = |\overline{A'B'}| = |\vec{a}| \cos \varphi$  zove se projekcija vektora  $\vec{a} = \overline{AB}$  na pravu  $n$  i

označava se sa:

$$p = pr_n \overline{AB}.$$

## Skalarni proizvod dva vektora

**Skalarni proizvod** dva vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  definiše se kao proizvod intenziteta vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  i kosinusa ugla koji obrazuju vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  i označava se sa  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Skalarni proizvod dva vektora je broj (skalar).

S obzirom da je  $\cos 90^\circ = 0$ , na osnovu definicije skalarnog proizvoda sledi: **Ako su dva vektora međusobno ortogonalna, tada je njihov skalarni proizvod jednak nuli**, tj.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Veza između skalarnog proizvoda i projekcije:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \operatorname{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$$

### Osobine skalarnog proizvoda

Za svaka tri vektora  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  važe sledeće relacije:

- 1)  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- 2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- 3)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- 4)  $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}), \forall \alpha \in R$
- 5)  $\vec{0} \cdot \vec{a} = \vec{0}$ .

### Skalarni proizvod preko koordinata

Neka su dati vektori  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  i  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ . Tada je njihov skalarni proizvod:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Ova formula proističe iz osobine 1) i iz činjenice da su koordinatni vektori međusobno ortogonalni, pa je prema tome:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

### Primene skalarnog proizvoda

- Utvrđivanje ortogonalnosti dva vektora:  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

- Određivanje intenziteta vektora:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- Određivanje ugla između dva vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  preko kosinusa tog ugla:

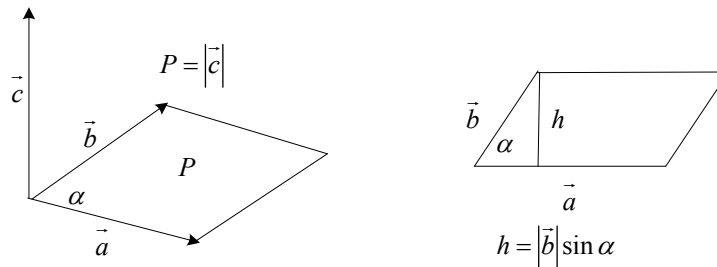
$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

## Vektorski proizvod dva vektora

Vektorski proizvod vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  je vektor  $\vec{c}$ , u oznaci  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ , čiji je

- pravac određen normalom na ravan koju obrazuju vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ ;
- smer određen po pravilu desnog zavrtnja;
- intenzitet jednak

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$$



Geometrijski posmatrano, **intenzitet vektorskog proizvoda dva vektora jednak je površini paralelograma koji je određen ovim vektorima**, što se može videti i sa napred navedene slike. Naime, imamo:

$$P = |\vec{a}| h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Ako su  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  kolinearni vektori, tada je  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$

### Osobine vektorskog proizvoda:

Za svaka tri vektora  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  važe sledeće relacije:

- 1)  $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
- 2)  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$$3) \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$4) (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha (\vec{a} \times \vec{b}), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Na osnovu gornje teoreme i definicije, za koordinatne vektore važi:

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \vec{j} \times \vec{j} = 0, \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

### Vektorski proizvod preko koordinata

Neka su dati vektori  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  i  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ . Tada se njihov vektorski proizvod može simbolički napisati preko determinante

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x). \end{aligned}$$

### Mešoviti proizvod tri vektora

Neka su data tri vektora  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Ako najpre vektorski pomnožimo vektore  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , odnosno odredimo vektor  $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ , a zatim tako dobijeni vektor pomnožimo skalarno sa vektorom  $\vec{c}$ , dobijamo **mešoviti proizvod** tri vektora:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

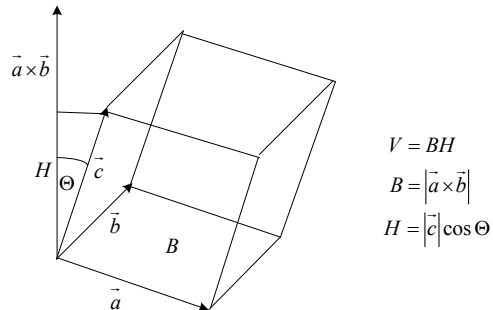
*Napomena:* Ne postoji proizvod  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$  ili  $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$ , jer je skalarni proizvod dva vektora skalar, a vektorski proizvod je moguć samo između dva vektora.

Ako su vektori zadati preko koordinata, tada se mešoviti proizvod izračunava pomoću determinante:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

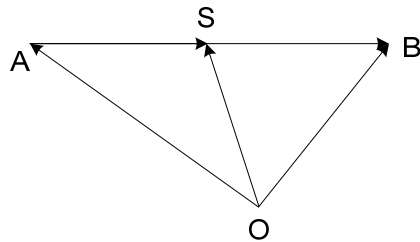
Vektori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  su komplanarni ako i samo ako je njihov mešoviti proizvod jednak nuli.

Ako vektori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  nisu komplanarni, tada je apsolutna vrednost njihovog mešovitog proizvoda jednaka zapremini paralelopipeda koji ovi vektori obrazuju.



77. Ako je  $S$  središte duži  $AB$  i  $O$  proizvoljna tačka, dokazati da je vektor  $\vec{OS} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$ .

**Rešenje:**



Iz  $\triangle AOS$  i  $\triangle BOS$  zaključujemo da je:

$$\vec{OS} = \vec{OA} + \vec{AS}$$

$$\vec{OS} = \vec{OB} + \vec{BS}$$

Ako saberemo napred navedene jednakosti dobićemo:

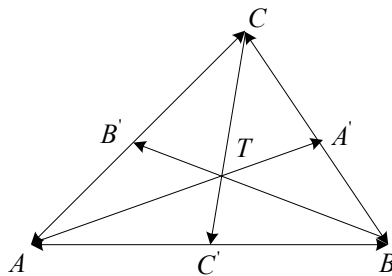
$$2\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \cancel{\overrightarrow{AS}} + \overrightarrow{OB} + \cancel{\overrightarrow{BS}} \quad \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} = \vec{0}, \text{ jer su } \overrightarrow{AS} \text{ i } \overrightarrow{BS} \text{ suprotni vektori.}$$

$$2\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}.$$

78. Ako su  $AA'$ ,  $BB'$  i  $CC'$  težišne duži trougla  $ABC$  dokazati da je  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ .

Rešenje:



$$\overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}}{2}$$

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}}{2}$$

Ako saberemo napred navedene jednakosti dobićemo:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}(\cancel{\overrightarrow{AB}} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \cancel{\overrightarrow{BA}} + \overrightarrow{CB} + \cancel{\overrightarrow{CA}})$$

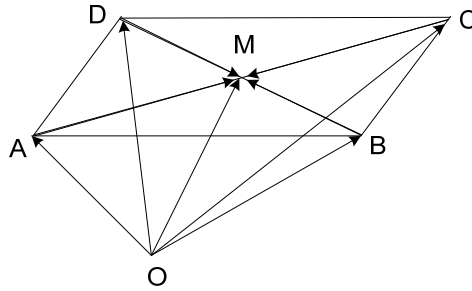
$\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  i  $\overrightarrow{CA}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  i  $\overrightarrow{CB}$  se potiru kao suprotni vektori, pa sledi:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2} \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

79. Neka je  $M$  presečna tačka dijagonala paralelograma  $ABCD$ , a  $O$  proizvoljna tačka (van četvorougla). Dokazati da je  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ .



**Rešenje:**



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DM}$$

Ako saberemo napred navedene jednakosti dobićemo:

$$4\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \cancel{\overrightarrow{AM}} + \overrightarrow{OB} + \cancel{\overrightarrow{BM}} + \overrightarrow{OC} + \cancel{\overrightarrow{CM}} + \overrightarrow{OD} + \cancel{\overrightarrow{DM}}$$

$\overrightarrow{AM}$  i  $\overrightarrow{CM}$ ,  $\overrightarrow{BM}$  i  $\overrightarrow{DM}$  se potiru kao suprotni vektori, pa dobijamo:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

**80.** Ako su  $i$  i  $j$  jedinični vektori, odrediti parametar  $m$  tako da vektori  $\vec{x} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  i  $\vec{y} = m\vec{i} - \vec{j}$  budu kolinearni.

**Rešenje:**

$$\vec{x} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\vec{y} = m\vec{i} - \vec{j}$$

$$m = ?$$

Ako je  $\vec{x} \neq 0$  i vektor  $\vec{y}$  kolinearan sa  $\vec{x}$ , tada postoji realan broj  $k$  takav da je

$\vec{x} = k\vec{y}$ . Zamenom zadatih  $\vec{x}$  i  $\vec{y}$  dobijamo:

$$2\vec{i} + 3\vec{j} = k(m\vec{i} - \vec{j})$$

$$2\vec{i} + 3\vec{j} = km\vec{i} - k\vec{j}$$

Izjednačavanjem levih i desnih strana jednakosti imamo:

$$km = 2$$

$$k = -3$$

$$-3m = 2$$

$$m = -\frac{2}{3}$$

**81.** Za koje  $\alpha$  vektori  $\vec{a}(2, 3, -4)$  i  $\vec{b}(\alpha, -6, 8)$  su paralelni?

**Rešenje:**

Ako je  $\vec{a} \neq 0$  i vektor  $\vec{b}$  kolinearan tj. paralelan sa  $\vec{a}$ , tada postoji realan broj  $\lambda$  takav da je  $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ . Zamenom zadatih  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  dobijamo:

$$(2, 3, -4) = k(\alpha, -6, 8)$$

$$(2, 3, -4) = (\alpha k, -6k, 8k)$$

Izjednačavanjem levih i desnih strana jednakosti imamo:

$$k\alpha = 2$$

$$-6k = 3 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

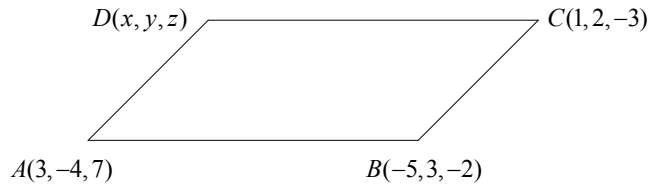
$$8k = -4 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$k\alpha = 2, k = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -4$$

82. Data su temena  $A(3, -4, 7)$ ,  $B(-5, 3, -2)$  i  $C(1, 2, -3)$  paralelograma  $ABCD$ . Naći koordinate četvrtog temena  $D$ .

**Rešenje:**



Pretpostavimo da teme  $D$  ima koordinate  $D(x, y, z)$ .

Onda su koordinate vektora  $\overrightarrow{AD}$  jednake:

$$\overrightarrow{AD} = (x - 3, y + 4, z - 7).$$

Sa druge strane, vektori  $\overrightarrow{BC}$  i  $\overrightarrow{AD}$  su međusobno jednaki, pa sledi:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (1 - (-5), 2 - 3, -3 - (-2)) = (6, -1, -1).$$

Iz napred navedenog dolazimo do sledeće jednakosti vektora:

$$\overrightarrow{AD} = (x - 3, y + 4, z - 7) = (6, -1, -1) \text{ tj.}$$

$$\begin{cases} x - 3 = 6 \\ y + 4 = -1 \\ z - 7 = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$x = 9$$

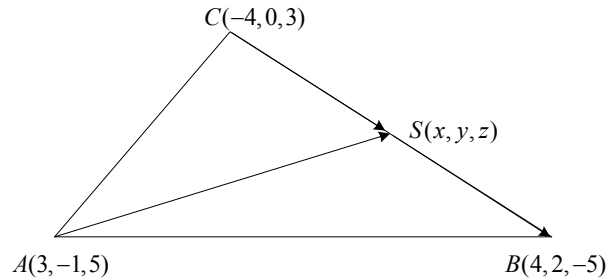
$$y = -5$$

$$z = 6$$

Dakle, koordinate temena  $D$  su:  $D(9, -5, 6)$ .

83. Data su temena trougla  $ABC$ :  $A(3, -1, 5)$ ,  $B(4, 2, -5)$  i  $C(-4, 0, 3)$ . Odrediti dužinu težišne duži iz temena  $A$ .

**Rešenje:**



$$A(3, -1, 5)$$

$$B(4, 2, -5)$$

$$C(-4, 0, 3)$$

Pretpostavimo da središte duži  $CB$ ,  $S$ , ima koordinate  $S(x, y, z)$ .

$$|\overrightarrow{AS}| = ?$$

Pošto je  $S$  središte duži  $CB$ , imamo da je  $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{SB}$ .

$$\overrightarrow{CS} = (x + 4, y, z - 3)$$

$$\overrightarrow{SB} = (4 - x, 2 - y, -5 - z)$$

Iz tri napred navedene jednakosti imamo:

$$(x + 4, y, z - 3) = (4 - x, 2 - y, -5 - z) \text{ tj.}$$

$$x + 4 = 4 - x$$

$$y = 2 - y$$

$$z - 3 = -5 - z$$

$\Rightarrow$

$$x = 0$$

$$y = 1$$

$$z = -1$$

Dakle, koordinate vektora  $\overrightarrow{AS}$  su:  $\overrightarrow{AS}(-3, 2, -6)$ , a njegov intenzitet:

$$|\overrightarrow{AS}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{9 + 4 + 36}$$

$$|\overrightarrow{AS}| = 7.$$

84. Naći ugao između vektora  $\vec{a} - \vec{b}$  i  $\vec{a} + \vec{b}$  ako je  $\vec{a} = (1, 2, 1)$  i  $\vec{b} = (2, -1, 0)$ .

**Rešenje:**

$$\vec{a} = (1, 2, 1)$$

$$\vec{b} = (2, -1, 0)$$

$$\angle(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) = ?$$

Radi jednostavnosti, obeležimo razliku vektora  $\vec{a} - \vec{b}$  sa  $\vec{m}$ , a zbir  $\vec{a} + \vec{b}$  sa  $\vec{p}$ .

$$\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} = (-1, 3, 1)$$

$$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} = (3, 1, 1).$$

Iz primene skalarnog proizvoda imamo da je:

$$\cos \angle(\vec{m}, \vec{p}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{p}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{p}|} = \frac{m_x p_x + m_y p_y + m_z p_z}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \quad \text{tj.}$$

$$\cos \angle(\vec{m}, \vec{p}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{p}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{p}|} = \frac{(-1) \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{11}$$

$$\angle(\vec{m}, \vec{p}) = \arccos \frac{1}{11}$$

$$\angle(\vec{m}, \vec{p}) \approx 85^\circ \quad \text{tj.}$$

$$\angle(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) \approx 85^\circ.$$

85. Vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  obrazuju ugao  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ . Zna se da su intenziteti vektora  $|\vec{a}| = 3$  i  $|\vec{b}| = 4$ . Izračunati  $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$ .

**Rešenje:**

$$(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) =$$

$$\begin{aligned}
&= 3|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 4|\vec{b}|^2 = \\
&= 3|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 4|\vec{b}|^2 = \\
&= 3|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ + 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos \frac{2\pi}{3} - 4|\vec{b}||\vec{b}|\cos 0^\circ = \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = \\
&= -61.
\end{aligned}$$

86. Vektor  $\vec{m}$  zadovoljava uslove:

- kolinearan je sa vektorom  $\vec{a}(6, -8, -7.5)$ ,
- njegova dužina je 50 i
- određuje oštar ugao sa osom  $z$ .

Odrediti koordinate vektora  $\vec{m}$ .

**Rešenje:**

$$\vec{a}(6, -8, -7.5)$$

$$|\vec{m}| = 50$$

$$\vec{m}(x, y, z) = ?$$

Ako je  $\vec{m} \neq 0$  i vektor  $\vec{a}$  kolinearan sa  $\vec{m}$ , tada postoji realan broj  $k$  takav da je  $\vec{m} = k\vec{a}$ .

Zamenom vektora  $\vec{m}$  i  $\vec{a}$  preko koordinata u prethodno navedenu jednakost dobijamo:

$$(x, y, z) = k(6, -8, -7.5) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 6k \\ y = -8k \\ z = -7.5k \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

Drugi uslov dat u zadatku je  $|\vec{m}| = 50$  tj.

$$|\vec{m}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 50 \dots\dots\dots (2)$$

Zamenom (1) u (2) dobijamo:

$$\sqrt{(6k)^2 + (-8k)^2 + (-7.5)^2} = 50$$

$$12.5k = 50$$

$$\Rightarrow k = 4$$

Ako zamenimo vrednost  $k = 4$  u (1) dobićemo vrednosti koordinata vektora  $\vec{m}$ :

$$\begin{cases} x = 6k = 6 \cdot 4 = 24 \\ y = -8k = -8 \cdot 4 = -32 \\ z = -7.5k = -7.5 \cdot 4 = -30 \end{cases}$$

tj. koordinate vektora  $\vec{m}$  su:  $\vec{m}(24, -32, -30)$ .

**87.** Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima  $\vec{a}(1, 1, -1)$  i  $\vec{b}(1, -1, 2)$ .

**Rešenje:**

Pošto je intenzitet vektorskog proizvoda dva vektora jednak površini paralelograma koji je određen ovim vektorima, imaćemo:

$$\begin{aligned} P &= |\vec{a} \times \vec{b}| \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} - \vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} = \\ &= \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k} \end{aligned}$$

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

**88.** Dati su vektori  $\vec{a}(1, 1, -1)$ ,  $\vec{b}(-2, -1, 2)$  i  $\vec{c}(1, -1, 2)$ . Razložiti vektor  $\vec{c}$  u komponente po pravcima vektora  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

**Rešenje:**

$$\vec{a}(1,1,-1)$$

$$\vec{b}(-2,-1,2)$$

$$\vec{c}(1,-1,2)$$

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} + p(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$m, n, p = ?$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} + 2\vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} = \vec{i} + \vec{k}.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} + \vec{k} \quad \text{tj.} \quad \vec{a} \times \vec{b} = (1, 0, 1)$$

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} + p(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$(1, -1, 2) = m(1, 1, -1) + n(-2, -1, 2) + p(1, 0, 1)$$

$$(1, -1, 2) = (m - 2n + p, m - n, -m + 2n + p)$$

Dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{cases} m - 2n + p = 1 \\ m - n = -1 \\ -m + 2n + p = 2 \end{cases}$$

sa rešenjima :

$$m = -\frac{3}{2}$$

$$n = -\frac{1}{2}$$

$$p = \frac{3}{2}$$

Razloženi vektor po traženim pravcima će glasiti:

$$\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}(\vec{a} \times \vec{b}).$$



89. Izračunati površinu trougla ako su date koordinate njegovih temena:  $A(2, -3, 4)$ ,  $B(1, 2, -1)$  i  $C(3, -2, 1)$ .

**Rešenje:**

Ako se trougao  $ABC$  transformiše u paralelogram  $ABCD$ , tada je:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABCD}, \text{ pa je:}$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABCD} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|.$$

Najpre ćemo odrediti koordinate vektora  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$ :

$$\overline{AB} = (1-2, 2-(-3), (-1)-4) = (-1, 5, -5)$$

$$\overline{AC} = (3-2, -2-(-3), 1-4) = (1, 1, -3),$$

a zatim njihov vektorski proizvod:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ AB_x & AB_y & AB_z \\ AC_x & AC_y & AC_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -15\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k} - 5\vec{k} + 5\vec{i} - 3\vec{j} = -10\vec{i} - 8\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABCD} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-10)^2 + (-8)^2 + (-6)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{200} = 5\sqrt{2}$$

90. Pokazati da su vektori  $\vec{a}(-1, 3, 2)$ ,  $\vec{b}(2, -3, -4)$  i  $\vec{c}(-3, 12, 6)$  komplanarni i odrediti njihovu linearnu zavisnost.

**Rešenje:**

Po već navedenoj teoremi, vektori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  su komplanarni ako i samo ako je njihov mešoviti proizvod jednak nuli. Dakle, treba dokazati da je mešoviti proizvod zadatih vektora jednak nuli.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = \cancel{18} + \cancel{36} + \cancel{48} - \cancel{18} - \cancel{48} - \cancel{36} = 0.$$

Pošto je mešoviti proizvod zadatih vektora jednak nuli, zaključujemo da su oni komplanarni.

Da bi smo odredili linearnu zavisnost ova tri vektora, napisaćemo, najpre, vektor  $\vec{a}$  preko vektora  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  na sledeći način:

$$\vec{a} = k_1 \vec{b} + k_2 \vec{c},$$

a zatim izračunati koeficijente  $k_1$  i  $k_2$ .

$$\vec{a} = k_1 \vec{b} + k_2 \vec{c}$$

$$(-1, 3, 2) = k_1(2, -3, -4) + k_2(-3, 12, 6)$$

$$(-1, 3, 2) = (2k_1 - 3k_2, -3k_1 + 12k_2, -4k_1 + 6k_2).$$

Dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{cases} 2k_1 - 3k_2 = -1 \\ -3k_1 + 12k_2 = 3 \\ -4k_1 + 6k_2 = 2 \end{cases}$$

Rešavanjem sistema sledi:

$$k_1 = -\frac{1}{5}$$

$$k_2 = \frac{1}{5}$$

Određivanjem koeficijenata  $k_1$  i  $k_2$  dobili smo i linearnu zavisnost traženih vektora:

$$\vec{a} = -\frac{1}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}.$$

**91.** Ivice tetraedra su vektori  $\vec{a}(1, 2\alpha, 1)$ ,  $\vec{b}(2, \alpha, \alpha)$  i  $\vec{c}(3\alpha, 2, -\alpha)$ ,  $\alpha \in R$  i  $\alpha \neq 0$ .

a) Odrediti zapreminu tetraedra.

b) Odrediti parameter  $\alpha \in R$ , tako da su  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  komplanarni.

**Rešenje:**

a) Na osnovu teoreme imamo da ako vektori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  nisu komplanarni, tada je apsolutna vrednost njihovog mešovitog proizvoda jednaka zapremini paralelopipeda koji ovi vektori obrazuju.

Zapremina tetraedra konstruisanog nad ovim vektorima jednaka je šestini zapremine paralelopipeda, tj.:

$$V_{tetraedra} = \frac{1}{6} V_{paralelopipeda}$$

$$V_{paralelopipeda} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2\alpha & 1 \\ 2 & \alpha & \alpha \\ 3\alpha & 2 & -\alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2\alpha \\ 2 & \alpha \\ 3\alpha & 2 \end{vmatrix} = -\alpha^2 + 6\alpha^3 + 4 - 3\alpha^2 - 2\alpha + 4\alpha^2$$

$$= 6\alpha^3 - 2\alpha + 4$$

$$V_{tetraedra} = \frac{1}{6} V_{paralelopipeda} = \frac{1}{6} (6\alpha^3 - 2\alpha + 4).$$

b) Vektori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  su komplanarni ako i samo ako je njihov mešoviti proizvod jednak nuli. Sledi:

$$6\alpha^3 - 2\alpha + 4 = 0$$

$$6\alpha^3 - 2\alpha + 6 - 2 = 0$$

$$6\alpha^3 + 6 - 2\alpha - 2 = 0$$

$$6(\alpha^3 + 1) - 2(\alpha + 1) = 0$$

$$6(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) - 2(\alpha + 1) = 0$$

$$2(\alpha + 1)(3\alpha^2 - 3\alpha + 3 - 1) = 0$$

$$2(\alpha + 1)(3\alpha^2 - 3\alpha + 2) = 0$$

$$3\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

$$\alpha + 1 = 0 \quad \wedge \quad \alpha_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 24}}{6}$$

$$\alpha = -1$$

$$\alpha \notin R$$

**PRIMER TESTA SA PRIJEMNOG ISPITA 2008.GODINE**

1. Uprostiti izraz:

$$\left(\frac{2^x + 2^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2^x - 2^{-x}}{2}\right)^2$$

2. Rešiti jednačinu:

$$(2x - 3)^2 + (2x - 5)^2 = 4(x - 3)^2 + 30$$

3. Izračunati vrednost izraza:

$$3 \log_5 25 + 2 \log_3 27 - 4 \log_2 8$$

4. Dokazati sledeći identitet:

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

5. Koliko je kvadratnih metara metalnog lima potrebno za izradu cilindričnog dimnjaka visine 18m i prečnika 65cm.

**PRIMER TESTA SA PRIJEMNOG ISPITA 2009.GODINE**

1. Uprostiti izraz

$$\frac{a^2 - a - 6}{a^2 - 4} - \frac{a - 1}{2 - a} - 2$$

2. Odrediti realna rešenja sledeće jednačine:

$$\sqrt{25 - x^2} = 7 - x$$

3. Izračunati:

$$5\sqrt{2} + 3\sqrt{8} - \sqrt{50} - \sqrt{98}$$

4. Dokazati sledeći identitet:

$$1 - \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

5. Date su osnovna ivica  $a = 10\text{cm}$  i visina  $H = 12\text{cm}$  pravilne četverostrane piramide. Odrediti njenu površinu i zapreminu.

## PRIMER TESTA SA PRIJEMNOG ISPITA 2010.GODINE

1. Uprostiti izraze:

$$\text{a) } \frac{a^2 - ab}{a^2 + ab} \cdot \frac{a^2 b + ab^2}{ab}$$

$$\text{b) } \frac{4x^2 y^2}{15b^3 c} : \frac{8x^3 y^3}{5c^2 b^2}$$

2. Rešiti jednačinu:

$$\frac{1+3x}{3x-1} + \frac{1-3x}{1+3x} = \frac{12}{1-9x^2}$$

$$\text{3. Ako je } A = \frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}} \text{ i } B = \left( \frac{a^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} - \frac{b^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}} \right) (a^{-1} - b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})^{-1}$$

dokazati da je  $A = B^{-1}$

4. Rešiti jednačinu:

$$\log_x(5x^2) \cdot \log_5^2 x = 1$$

5. Pravilna četverostrana prizma ima omotač  $8\text{m}^2$  i dijagonalu  $3\text{m}$ . Izračunati njenu zapreminu.

**PRIMER TESTA SA PRIJEMNOG ISPITA 2010.GODINE (septembar)**

1. Uprostiti izraz:

$$\frac{27x^{-2}y^{-3}}{3^2x^{-4}y^2}$$

2. Rešiti jednačinu:

$$\frac{2x}{x-9} - \frac{x^2+25}{x^2-81} = \frac{5}{x+9} - \frac{5}{x-9}$$

3. Dokazati sledeći identitet:

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

4. Visina kupe je 12cm, a površina osnog preseka je 42 cm<sup>2</sup>. Odrediti površinu osnove i izvodnicu kupe.

5. Pravilna četverostrana prizma ima omotač 8m<sup>2</sup> i dijagonalu 3m. Izračunati njenu zapreminu.

## LITERATURA:

Vene Bogoslavov, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 1*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1996.

Vene Bogoslavov, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 2*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1996.

Vene Bogoslavov, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 3*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1998.

Jovan Kečkić, *Matematika sa zbirkom zadataka za III razred srednje škole*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1999.

Živorad Ivanović, Srđan Ognjanović, *Matematika 2, zbirka zadataka i testova za II razred gimnazija i tehničkih škola*, Krug, Beograd, 1999.

Živorad Ivanović, Srđan Ognjanović, *Matematika 3, zbirka zadataka i testova za III razred gimnazija i tehničkih škola*, Krug, Beograd, 1999.

<http://en.wikipedia.org>

<http://www.mycity.rs/Matematika/Matematika-Geometrija.html>